

KALKULUS 2 2023

KALKULUS 2

2
0
2
3

ENDANG ISTIKOMAH S.Pd.,M.Ed

ENDANG ISTIKOMAH S.Pd.,M.Ed

ISBN 978-623-6598-77-1




PRESS

Kalkulus 2

Endang Istikomah S.Pd., M.Ed

Penerbit:



UNIVERSITAS ISLAM RIAU

Kalkulus 2

Penulis: Endang Istikomah S.Pd., M.Ed

ISBN: 9786236598771

Editor: Endang Istikomah S.Pd., M.Ed

Penyunting: Endang Istikomah S.Pd., M.Ed

Desain sampul dan Tata Letak: Maharudin, S.Hi

Penerbit: Universitas Islam Riau (UIR) Press

Redaksi:

Gedung Serba Guna Universitas Islam Riau

Jl. Kaharuddin Nasution No. 113

Marpoyan 28284, Pekanbaru, Riau, Indonesia

Telp: (0761) 674674

Fax: (0761) 674834

Email: uirpress@uir.ac.id

Cetakan Pertama, November 2023

Hak Cipta dilindungi undang-undang;

Dilarang keras mengutip, menjiplak, memfotokopi atau memperbanyak dalam bentuk apapun, baik sebagian atau keseluruhan isi buku ini serta memperjualbelikannya tanpa izin tertulis dari **Penerbit UIR Press**.

KATA PENGANTAR

Puji syukur atas kehadiran Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan buku ini. Buku ini merupakan kelanjutan dari buku Kalkulus I (2 SKS), dan dirancang untuk memberikan pemahaman yang lebih mendalam tentang konsep-konsep matematika yang mendasari kalkulus. Kalkulus II adalah mata kuliah yang menggali lebih dalam pada konsep-konsep yang telah diperkenalkan dalam Kalkulus I.

Buku ini disusun dengan tujuan membantu para pembaca umumnya dan mahasiswa teknik geologi semester 2 khususnya dalam memahami konsep-konsep yang lebih kompleks dalam kalkulus, serta mengaplikasikannya dalam berbagai situasi matematis yang lebih canggih. Selain daripada itu, buku ini juga dapat menjadi stimulus bagi dosen untuk kembali berinovasi terkait pendekatan dalam proses pembelajaran, untuk mempelajari suatu konsep dan dapat menemukan strategi eksplorasi yang digunakan untuk memahami konsep-konsep matematika secara sederhana. Sehingga meningkatkan efisiensi dalam pembelajaran.

Dalam pengembangan buku ini, penulis berusaha untuk menyajikan materi dengan bahasa yang jelas dan ringkas, serta memberikan contoh-contoh yang relevan dan aplikatif. Buku ini juga dilengkapi dengan berbagai latihan soal untuk membantu pembaca mengasah kemampuan pemahaman dan penerapan konsep-konsep kalkulus. Penulis menyadari bahwa mempelajari kalkulus tidak selalu mudah bagi sebagian besar pembaca. Oleh karena itu, penulis berharap buku ini dapat menjadi panduan yang membantu memudahkan pemahaman dan penerapan konsep-konsep kalkulus tingkat lanjut.

Penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah memberikan dukungan dan inspirasi dalam penyusunan buku ini. Semoga buku ini bermanfaat sebagai sumber belajar yang baik bagi para pembaca, mahasiswa, dan siapa pun yang tertarik dalam memahami lebih dalam tentang dunia kalkulus.

Akhir kata, semoga Allah SWT senantiasa memberikan kemudahan dan kesuksesan dalam setiap langkah perjalanan ilmu pengetahuan kita.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Pekanbaru, 20 November 2023

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	iv
DAFTAR ISI.....	vi
BAB I HIMPUNAN DAN BILANGAN	1
A. Definisi.....	1
B. Cara Penyajian Himpunan.....	2
C. Macam – Macam Himpunan.....	4
D. Operasi Himpunan	7
E. Himpunan Bilangan	10
F. Sifat – Sifat Operasi Bilangan.....	12
Latihan 1.1:	15
BAB II BILANGAN REAL	18
A. Sistem Bilangan	18
B. Sistem Bilangan Real	20
C. Nilai Mutlak	23
Latihan 2.1.....	24
BAB III LIMIT DAN KEKONTINUAN	25
A. Definisi Limit.....	25
Latihan 3.1:	29
B. Pengkajian Mendalam Tentang Limit.....	30
Latihan 3.2:	36
C. Kekontinuan Fungsi	37
Latihan 3.3:	41
BAB IV DIFERENSIAL	42
A. Definisi.....	42
Latihan 4.1 :	43
B. Diferensial Fungsi Aljabar	43
Latihan 4.2:	45
C. Aturan Rantai	46
Latihan 4.3:	47
D. Diferensial Fungsi Trigonometri.....	48
Latihan 4.4.....	49
E. Diferensial Parsial	50
Latihan 4.5 :	50
F. Penggunaan Diferensial	51
Latihan 4.6:	54
Latihan 4.7 :	57
Latihan 4.8:	60

BAB V INTEGRAL	61
A. Definisi Integral Tak Tentu.....	61
Latihan 5.1:	62
B. Integral Fungsi Trigonometri	63
Latihan 5.2.....	65
C. Penerapan Integral Tentu	65
Latihan 5.3:	71
D. Teorema Dasar Kalkulus.....	71
Latihan 5.4:	75
E. Aturan Leibniz	76
Latihan 5.5:	78
F. Fungsi Transenden	79
Latihan 5.6:	84
Latihan 5.7 :	90
Latihan 5.8:	94
BAB VI PEMECAHAN MASALAH DAN APLIKASI.....	95
A. Penggunaan Kalkulus dalam Konteks Geologi.....	95
B. Pemodelan Matematika dalam Geologi	103
Latihan 6.1:	109
REFERENSI	110

BAB I

HIMPUNAN DAN BILANGAN

A. Definisi

Dalam matematika konsep himpunan termasuk konsep yang tidak didefinisikan (konsep dasar). Konsep himpunan mendasari hampir semua cabang ilmu matematika. Perkataan himpunan digunakan di dalam matematika untuk menyatakan kumpulan benda-benda atau objek-objek yang didefinisikan dengan jelas. Istilah didefinisikan dengan jelas dimaksudkan agar orang dapat menentukan apakah suatu benda merupakan anggota himpunan yang dimaksud tadi atau tidak. Benda-benda atau objek-objek yang termasuk dalam sebuah himpunan disebut anggota atau elemen himpunan tersebut.

- a. Jadi Himpunan (Set) : Sekelompok atau satu koleksi atau daftar dari obyek - obyek berbeda yang berada dalam satu kesatuan yang dapat didefinisikan dengan jelas.
- b. Objek didalam himpunan disebut **elemen**, **unsur**, atau **anggota**.
- c. Notasi Himpunan dinyatakan dengan huruf besar
Misalkan : A, B, C, ... dst.
- d. Notasi Anggota Himpunan " $\in$ "

Contoh 1

Jika A adalah himpunan yang anggotanya a, b, dan c, maka dapat ditulis $A = \{a, b, c\}$. Jelaslah bahwa a anggota himpunan A, dapat ditulis $a \in A$, Demikian juga $b \in A$ dan $c \in A$. Tetapi $d \notin A$.

Contoh 2

Kumpulan yang bukan merupakan himpunan

- a. Kumpulan makanan lezat
- b. Kumpulan batu-batu besar
- c. Kumpulan lukisan indah

Ketiga contoh kumpulan diatas bukan merupakan himpunan sebab anggota - anggotanya tidak didefinisikan dengan jelas.

Contoh 3

Kumpulan yang merupakan himpunan

- a. Kumpulan negara-negara Asean
- b. Kumpulan sungai-sungai di Indonesia
- c. Kumpulan bilangan asli genap
- d. Kelas juga merupakan contoh sebuah himpunan, di dalamnya berisi anggota berupa mahasiswa. Tiap mahasiswa berbeda satu sama lain.

B. Cara Penyajian Himpunan

Ada beberapa cara dalam menyatakan Himpunan, yaitu:

a. Enumerasi (Mencacahkan Anggotanya)

Himpunan dinyatakan dengan menyebutkan semua anggota himpunannya didalam satu kurung kurawal, Artinya setiap anggota himpunan didaftarkan secara rinci.

Contoh 4:

1. Himpunan lima bilangan ganjil pertama ditulis: $A = \{1,3,5,7,9\}$
2. Himpunan 10 bilangan cacah pertama: $S = \{0,1,2,3,...,10\}$
3. Himpunan enam bilangan prima pertama: $P = \{2,3,5,7,11,13\}$
4. Himpunan bilangan bulat: $B = \{...-2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
5. Himpunan bilangan asli yang kurang dari 20: $C = \{1, 2, ..., 20\}$

b. Simbol – Simbol Baku

Suatu Himpunan dapat dinyatakan dalam suatu simbol standar (baku) yang telah diketahui secara umum oleh masyarakat.

Contoh 5:

P = himpunan bilangan bulat positif = $\{ 1, 2, 3, ... \}$

N = himpunan bilangan Asli (natural) = $\{ 1, 2, ... \}$

Z = himpunan bilangan bulat = $\{ ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... \}$

Q = himpunan bilangan rasional (yang dapat dinyatakan sebagai a/b dan $b \neq 0$)

R = himpunan bilangan riil (bilangan yang bisa dituliskan dalam bentuk desimal: 1,12)

C = himpunan bilangan kompleks (bilangan yang berbentuk $a + bi$ dan i adalah imajiner $i^2 = -1$)

U = Himpunan yang universal (**semesta**)

Contohnya:

Misalkan $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan A adalah himpunan bagian dari U , dengan $A = \{1, 3, 5\}$.

c. Notasi Pembentuk Himpunan

Suatu himpunan dapat dinyatakan dengan cara menuliskan syarat keanggotaan himpunan tersebut, seperti sbb:

Notasi : $\{ x \mid \text{syarat yang harus dipenuhi oleh } x \}$

Contoh 6:

(i) A adalah himpunan bilangan bulat positif kecil dari 6

$A = \{x \mid x \text{ Bil. Bul positif lebih kecil dari } 6\}$

Atau $A = \{x \mid x \in P, x < 6\}$

Ekivalen dengan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(ii) $M = \{x \mid x \text{ adalah mahasiswa yang mengambil kuliah Mat_Das}\}$

Atau $M = \{x \text{ adalah mahasiswa} \mid \text{ia mengambil kuliah Mat Das}\}$

d. Diagram Venn

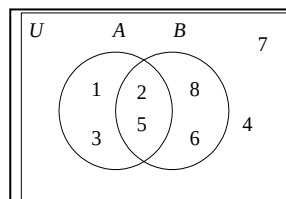
Suatu himpunan dapat dinyatakan dengan cara menuliskan anggotanya dalam suatu gambar (diagram) yang disebut “Diagram Venn”.

Contoh 7:

Misalkan $U = \{1, 2, \dots, 7, 8\}$,

$A = \{1, 2, 3, 5\}$ dan $B = \{2, 5, 6, 8\}$.

Diagram Vennnya:



e. Kardinalitas

Jumlah elemen atau unsur didalam sebuah himpunan (A) disebut **kardinalitas** dari himpunan (A) tersebut.

Notasi: $n(A)$ atau $|A|$

Contoh 8:

- (i) $K = \{x \mid x \text{ merupakan bilangan Ganjil lebih kecil dari } 15\}$,
atau $K = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ maka $|K| = 7$
- (ii) $T = \{\text{marmut, } e, \text{Kiki, 5, buku}\}$, maka $|T| = 5$
- (iii) $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$, maka $|A| = 3$

C. Macam – Macam Himpunan

Dalam materi himpunan ada beberapa macam himpunan, dari setiap himpunan memiliki definisi dan contoh yang berbeda-beda, oleh karena itu kita perlu memahami lebih dalam dan jangan sampai keliru dalam memahaminya, berikut penjelasannya.

a. Himpunan Kosong

Himpunan yang tidak memiliki anggota atau himpunan dengan kardinalitas = 0. Dilambangkan dengan : $\{ \}$ atau $\emptyset$. Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari seluruh himpunan.

Contoh 9:

- (i) $P = \{\text{Orang indonesia yang pernah kebulan}\}$, maka $n(P) = \{ \}$ atau $\emptyset$.
- (ii) $K = \{\text{Himpunan bilangan genap kurang dari } 2\}$, maka $n(K) = \{ \}$
- (iii) $L = \{\text{Himp Bilangan Genap yang habis dibagi } 3\}$, maka $n(L) = \{ \}$

b. Himpunan yang Sama

Himpunan A dikatakan sama dengan himpunan B , jika kedua himpunan itu memiliki anggota yang sama.

- $A = B$ Jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A .
- $B = A$ Jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A . Jika tidak demikian, maka $A \neq B$
- Notasi $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Contoh 10:

- Jika himpunan $A = \{ 2, 3, 4 \}$ dan himpunan $B = \{ 2, 3, 4 \}$, maka $A = B$
- Jika himpunan $A = \{m, u, e, i, s, u\}$ dan himpunan $B = \{m, e, i, s, u\}$, maka $A = B$
- Jika himpunan $A = \{ \text{buku, penggaris, spidol} \}$ dan himpunan $B = \{ \text{buku, spidol} \}$, maka $A \neq B$

c. Himpunan yang Ekuivalen

Suatu himpunan A dikatakan ekuivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.

$$\text{Notasi : } A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$$

Contoh 11:

Misalkan $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{a, b, c, d, e\}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 5$.

d. Himpunan Bagian

Himpunan A disebut himpunan bagian (subset) dari B , jika setiap elemen atau unsur himpunan A merupakan anggota himpunan B . Dalam hal ini B merupakan superset dari A .

$A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$

- (i) $A \subset B$: A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.
 A adalah himpunan bagian sebenarnya (*Proper subset*) dari B .
 Contoh: $\{1\}$ dan $\{2, 3\}$ adalah *Proper subset* dari $\{1, 2, 3\}$

- (ii) $A \subseteq B$: digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B yang memungkinkan $A = B$.

Contoh 12:

Himpunan $A = \{ 5, 6, 7 \}$ dan $B = \{ 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$, Maka $A \subseteq B$ dan $B \supset A$.

e. Himpunan Saling Lepas

Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*Disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.

Notasinya: $A // B$

Contoh 13:

Jika $A = \{x \mid x \in P, x < 6\}$ dan $B = \{8, 10, 12, 14, \dots\}$, maka $A // B$

f. Himpunan Kuasa

Himpunan kuasa (powerset) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A , termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.

Notasinya: $P(A)$ atau 2^A .

Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$.

Contoh 14:

- Jika $A = \{1, 2\}$. Maka $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
- Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ dan Himpunan kuasa dari himpunan $\{\emptyset\}$ adalah $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

D. Operasi Himpunan

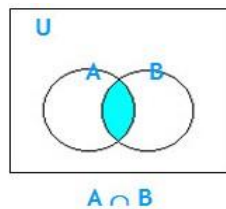
Operasi himpunan adalah cara untuk menggabungkan dua atau lebih himpunan menjadi himpunan baru. Ada beberapa operasi himpunan yang perlu diketahui, yaitu: Irisan ($\cap$), Gabungan ($\cup$), Selisih ($-$), Komplemen ($\bar{A}$), dan beda setangkup ($\oplus$).

a. Irisan (Intersection / $\cap$)

Irisan antara dua buah himpunan dinotasikan oleh tanda " $\cap$ ". Misalkan A dan B adalah himpunan yang tidak saling lepas, maka

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$$

Jika dinyatakan dalam diagram Venn adalah:



Contoh 15:

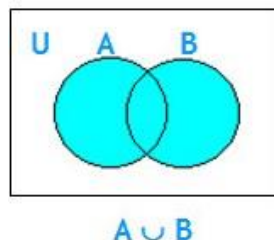
Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$, maka $A \cap B = \{4, 10\}$

b. Gabungan (Union / $\cup$)

Gabungan antara dua buah himpunan dinotasikan oleh tanda " $\cup$ ". Misalkan A dan B adalah himpunan, maka

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$$

Jika dinyatakan dalam bentuk diagram Venn adalah:



Contoh 16:

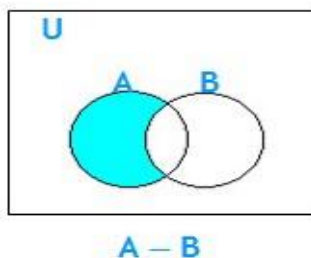
Jika $A = \{2, 3, 5\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8\}$, maka $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

c. Selisih (Difference / -)

Selisih antara dua buah himpunan dinotasikan oleh “ - ”. Jika A dan B adalah himpunan, maka selisih A dan B dinotasikan:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B\}$$

Jika dinyatakan dalam bentuk diagram Venn adalah:



Contoh 17:

- Jika $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ dan $B = \{4, 6, 8, 10\}$, maka $A - B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ dan $B - A = \{ \}$
- $\{1, 4, 5\} - \{1, 6, 4\} = \{5\}$, tetapi $\{1, 6, 4\} - \{1, 4, 5\} = \{6\}$.

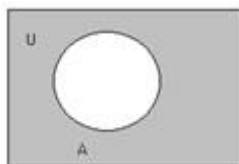
d. Komplemen (Complement / $\bar{A}$)

Komplemen dari suatu himpunan merupakan unsur-unsur yang ada pada himpunan universal, kecuali anggota himpunan tersebut.

Misalkan A merupakan himpunan yang berada pada universal U, maka komplemen dari himpunan A dinotasikan oleh

$$\bar{A} = A^c = \{x \mid x \in U, x \notin A\}$$

Jika dinyatakan dalam bentuk diagram Venn adalah:



Contoh 18:

Misalkan $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$,

- (i) Jika $A = \{2, 4, 6, 8\}$, maka $\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

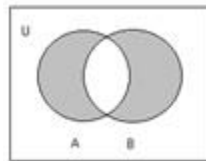
(ii) Jika $A = \{x \mid x/2 \in P, x < 10\}$, maka $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

e. Beda Setangkup (Symmetric Difference / $\oplus$)

Beda setangkup antara dua buah himpunan dinotasikan oleh tanda $\oplus$. Misalkan A dan B adalah himpunan, maka beda setangkup antara A dan B dinotasikan oleh:

$$\begin{aligned} A \oplus B &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= (A - B) \cup (B - A) \end{aligned}$$

Jika dinyatakan dalam bentuk diagram Venn adalah:



Contoh 19:

Jika $A = \{2, 4, 6\}$ dan $B = \{2, 3, 5\}$, maka $A \oplus B = \{3, 4, 5, 6\}$

f. Perkalian Kartesius (Cartesius Product/ $\times$)

Perkalian antara dua buah himpunan dinotasikan “ $\times$ ”. Jika $A \times B$ adalah himpunan, maka Perkalian Kartesius antara A dan B dinotasikan $A \times B$

$$\text{Notasi: } A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

Contoh 20:

- Misalkan $C = \{1,2,3\}$, dan $D = \{a, b\}$, maka $C \times D = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3,a), (3, b)\}$
- Misalkan $A = B =$ himpunan semua bilangan riil, maka $A \times B =$ himpunan semua titik di bidang datar.

Catatan:

Jika dua himpunan dengan kardinalitas berhingga maka, kardinalitas himpunan dari suatu perkalian kartesius antara dua himpunan tersebut

adalah perkalian kartesius antara kardinalitas masing-masing himpunan. Dengan demikian:

- Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
- $(a, b) \neq (b, a)$
- $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong.
- Jika $A = \emptyset$ atau $B = \emptyset$, maka $A \times B = B \times A = \emptyset$

E. Himpunan Bilangan

Himpunan bilangan adalah konsep dasar dalam matematika. Berikut adalah beberapa jenis himpunan bilangan yang umum:

a. Bilangan Asli /bulat positif.

Bilangan Asli (N) adalah himpunan semua bilangan bulat positif dimulai dari 1.

Contoh: $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

b. Bilangan bulat negatif

Bilangan bulat negatif adalah semua bilangan bulat yang memiliki nilai negatif. Dalam garis bilangan, bilangan bulat negatif berada di sebelah kiri bilangan bulat nol (0).

Contoh: $\{\dots, -4, -3, -2, -1\}$

c. Bilangan bulat (Z).

Bilangan bulat adalah himpunan semua bilangan bulat, baik positif, negatif, maupun nol.

Contoh: $Z = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

d. Bilangan rasional.

Bilangan rasional adalah himpunan semua bilangan yang bisa ditulis sebagai rasio dua bilangan bulat, dengan pembagi bukan nol. Bilangan rasional dapat ditulis dalam bentuk a/b , dengan a dan b anggota bilangan bulat dan $b \neq 0$. $\{1/5$ menjadi $a = 1$ dan $b = 5\}$

e. Bilangan irrasional bilangan-bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai pecahan, atau bilangan yang bukan bilangan rasional. $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots\}$

f. Bilangan real

Bilangan real adalah himpunan semua bilangan yang bisa digambarkan di garis bilangan, termasuk bilangan rasional dan irasional (bilangan yang tidak bisa ditulis sebagai rasio dua bilangan bulat).

Contoh : $\{0, 1, 2, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{55}{7}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots\}$

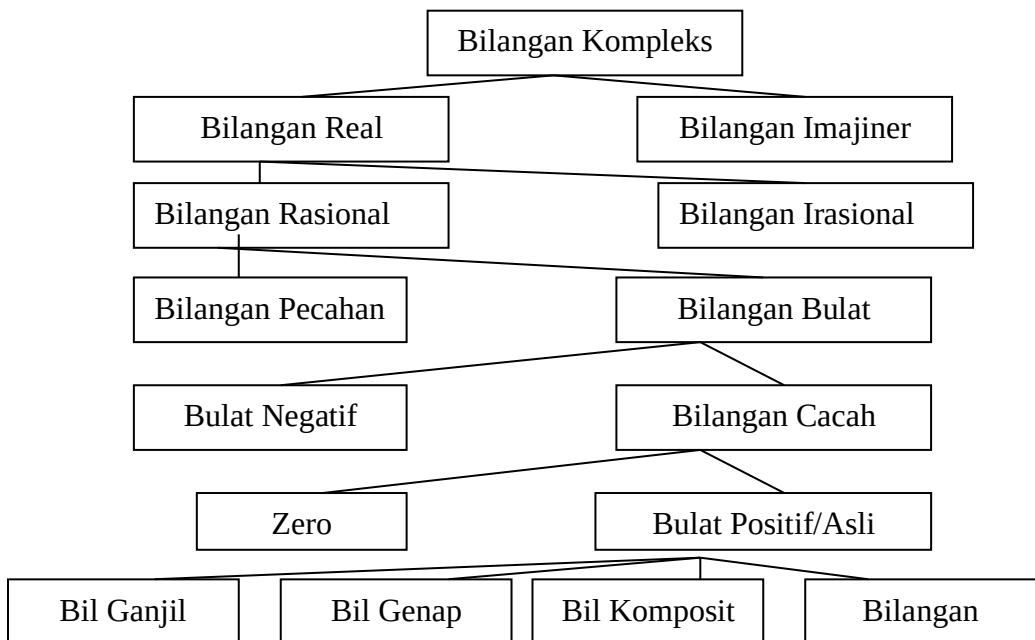
g. Bilangan imajiner.

Bilangan imajiner adalah himpunan semua bilangan yang bisa ditulis dalam bentuk $a + bi$, di mana a dan b adalah bilangan real dan i adalah unit imajiner. Bilangan yang dinyatakan dengan $i = \sqrt{-1}$ dan $i^2 = -1$

h. Bilangan kompleks.

Bilangan kompleks adalah : himpunan semua bilangan yang bisa ditulis dalam bentuk $a + bi$, di mana a dan b adalah bilangan real dan i adalah unit imajiner. Himpunan ini mencakup semua bilangan real dan imajiner. Bilangan imajiner dapat ditulis : $2 + 3i$

Diagram Himpunan



F. Sifat – Sifat Operasi Bilangan

Sifat-sifat operasi bilangan merupakan dasar penting dalam matematika. Ada beberapa sifat operasi yang harus kita pahami yaitu:

a. Sifat komutatif

Sifat ini berlaku untuk operasi penjumlahan dan perkalian. Jika ada dua bilangan, a dan b , maka $a + b = b + a$ dan $a * b = b * a$ atau dalam bentuk lain $A \cap B = B \cap A$ dan $A \cup B = B \cup A$. Artinya, urutan operasi tidak mengubah hasil.

b. Sifat asosiatif

Sifat ini juga berlaku untuk operasi penjumlahan dan perkalian. Jika ada tiga bilangan, a , b , dan c , maka $(a + b) + c = a + (b + c)$ dan $(a * b) * c = a * (b * c)$ atau dalam bentuk lain $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ dan $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. Ini berarti bahwa pengelompokan tidak mengubah hasil.

c. Sifat distributif

Sifat ini menghubungkan operasi penjumlahan dan perkalian. Jika ada tiga bilangan, a , b , dan c , maka $a * (b + c) = a * b + a * c$ atau $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dan $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

d. Hukum De Morgan

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C \text{ dan } (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

e. Hukum Identitas

Untuk setiap bilangan a , ada penjumlahan dan perkalian identitas. Untuk penjumlahan, $a + 0 = a$. Untuk perkalian, $a * 1 = a$ atau $A \cup A = A$, $A \cap A = A$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ dan $A \cup A^C = S$ dan $S \cap A^C = \emptyset$ $S \cup A = S$, $S \cap A = A$, dan $(\emptyset)^C = S$, $(S)^C = \emptyset$, dan $(A^C)^C = A$

f. Sifat dasar himpunan

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) \text{ jika } A \cap B \neq \emptyset$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{ jika } A \cup B \neq \emptyset$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

g. Sifat Absorpsi

$$A \cap (A \cup B) = A, \quad A \cup (A \cap B) = A$$

h. Sifat Idempoten

$$A \cap A = A, A \cup A = A$$

1.1.1 Pangkat Eksponen

a. Pangkat Bilangan Bulat Positif

Bentuk Umum : A^n

Dimana

A = Bilangan pokok

n = pangkat atau eksponen

b. Pangkat Bilangan Bulat Negatif, Nol dan pecahan

$$- A^{-n} = \frac{1}{A^n}$$

$$- A^0 = 1$$

$$- A^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{A^m}$$

c. Sifat – sifat Eksponen

$$- A^n \times A^m = A^{m+n}$$

$$- \frac{A^n}{A^m} = A^{n-m}$$

$$- (A \times B)^n = A^n \times B^n.$$

$$- \left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$$

1.1.2 Operasi Bentuk Akar

a. Penjumlahan dan Pengurangan Bentuk Akar

$$\sqrt[n]{A} + \sqrt[m]{A} = \sqrt[n+m]{A}$$

$$\sqrt[n]{A} - \sqrt[m]{A} = \sqrt[n-m]{A}$$

b. Perkalian Bentuk Akar

$$\sqrt{A} \times \sqrt{B} = \sqrt{AB}$$

$$\sqrt[n]{A} \times \sqrt[m]{B} = \sqrt[nm]{AB}$$

c. Pembagian bentuk akar

$$\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}} = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}$$

d. Merasionalkan penyebut

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A}{\sqrt{B}} \times \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B}}$$

Persamaan Pangkat sederhana

Jika $A^m = A^n$ maka $m = n$

Latihan 1.1:

1. Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Tentukan semua kemungkinan himpunan C sedemikian sehingga $A \subset C$ dan $C \subset B$, yaitu A adalah *proper subset* dari C dan C adalah *proper subset* dari B .
2. Tuliskan himpunan di bawah ini dengan lambang himpunan
 - a. Himpunan huruf vokal
 - b. Himpunan bilangan asli kurang dari 6
 - c. Himpunan huruf-huruf pembentuk kata matematika
3. Tentukan banyak anggota himpunan dibawah ini
 - a. A adalah himpunan huruf-huruf penyusun kata “informatika”
 - b. B adalah himpunan bilangan bulat antara -5 dan 5
 - c. C adalah himpunan bil. Cacah
 - d. D adalah himpunan bil. Asli
 - e. E adalah himpunan bil. bulat
4. Gambarlah diagram venn dari himpunan-himpunan dibawah ini
 - a. $S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$
 $A = \{1,2,3,4\}$
 $B = \{5,6,7\}$
 - b. $S = \{0,1,2,\dots,10\}$
 $A = \{2,3,4,5,6\}$
 $B = \{5,6,7,8,9\}$
 $C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
5. Misalkan $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ dan $B = \{3, 6, 9, 12\}$

Maka $A \cap B$ dan $A \cup B$?
6. Misalkan A adalah himpunan mahasiswa Teknik dan B adalah himpunan wanita usia lanjut (55 tahun keatas), simbolnya ?
7. Tuliskan notasi untuk soal dibawah ini jika dimisalkan:
 A = Himpunan semua mobil buatan dalam negeri
 B = Himpunan semua mobil impor

C = Himpunan semua mobil yang dibuat sebelum tahun 1990

D = Himpunan semua mobil yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta

E = Himpunan semua mobil milik mahasiswa universitas tertentu

Maka:

(i) “mobil mahasiswa di universitas ini diproduksi dalam negeri atau impor dari luar negeri” $\rightarrow$

(ii) “semua mobil produksi dalam negeri yang dibuat sebelum tahun 1990 yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta” $\rightarrow$

(iii) “semua mobil impor buatan setelah tahun 1990 mempunyai nilai jual lebih dari Rp 100 juta” $\rightarrow$

8. Tuliskan notasi untuk soal berikut jika dimisalkan

U = Himpunan mahasiswa

P = Himpunan mahasiswa yang nilai ujian UTS di atas 85

Q = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UAS di atas 85

Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai UTS dan nilai UAS keduanya di atas 85, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 85, dan mendapat nilai C jika kedua ujian dibawah 85.

Maka:

(i) “Semua mahasiswa yang mendapat nilai A ” :

(ii) “Semua mahasiswa yang mendapat nilai B ” :

(iii) “Semua mahasiswa yang mendapat nilai C ” :

9. Misalkan

A = himpunan makanan = {s = soto, g = gado-gado, n = nasi goreng, m = mie rebus}

B = himpunan minuman = {c = coca-cola, t = teh, d = es dawet}

Berapa banyak kombinasi makanan dan minuman yang dapat disusun dari kedua himpunan di atas?

10. Misalkan A adalah himpunan. Periksa apakah setiap pernyataan dibawah ini benar atau salah dan jika salah, bagaimana seharusnya:

a) $A \cap P(A) = P(A)$

- b) $\{A\} \cup P(A) = P(A)$
 - c) $A - P(A) = A$
 - d) $\{A\} \in P(A)$
 - e) $A \subseteq P(A)$
11. Nyatakan operasi himpunan antara A , B , jika $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}$ dan $B = \{11,12,13,14,15\}$
12. Berapa banyak bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5 ?
13. Diantara bilangan bulat antara 100 – 600 (termasuk 100 dan 600 itu sendiri), berapa banyak bilangan yang tidak habis dibagi oleh 4 atau 5 namun tidak keduanya?
14. Diketahui
- A = himpunan mahasiswa Pendidikan
 - B = himpunan mahasiswa yang tinggal diasrama
 - C = himpunan mahasiswa Pendidikan Kimia
 - D = himpunan mahasiswa yang mengambil matakuliah matematika
 - E = himpunan mahasiswa yang membawa motor untuk pergi ke kampus
- Nyatakan operasi himpunan dalam pernyataan berikut:
- a. “Semua mahasiswa pendidikan jurusan Pendidikan Kimia yang membawa motor untuk pergi ke kampus”
 - b. “Semua mahasiswa pendidikan yang tinggal di asrama dan tidak mengambil matakuliah matematika”
 - c. “Semua mahasiswa jurusan Pendidikan Kimia yang tidak tinggal diasrama atau tidak membawa motor untuk pergi ke kampus”

BAB II

BILANGAN REAL

Sebelum membahas tentang konsep sistem bilangan real, terlebih dahulu kita ingat kembali tentang konsep himpunan. Konsep dasar dalam matematika khususnya bilangan real adalah berkaitan dengan himpunan atau kumpulan atau koleksi dari objek-objek yang dapat didefinisikan dengan jelas. Misalnya himpunan huruf kapital yang terdiri dari A, B, C, D, ..., Z. Setiap karakter A, B, C, D, ..., Z yang termasuk di dalam himpunan huruf kapital tersebut dinamakan anggota atau elemen dari himpunan yang dimaksud. Beberapa himpunan yang seluruh anggotanya terdapat dalam himpunan huruf kapital tersebut, misalnya himpunan A, B, C, disebut dengan subset atau himpunan bagian dari A, B, C, ..., Z. Suatu himpunan yang tidak memiliki elemen disebut himpunan kosong yang dinotasikan dengan $\emptyset$ atau $\{ \}$.

A. Sistem Bilangan

Sistem bilangan adalah himpunan dari bilangan-bilangan beserta sifat-sifatnya. Himpunan bilangan yang istimewa dan penting adalah himpunan bilangan real. Tetapi apakah bilangan real itu dan bagaimana sifat-sifatnya? Untuk menjawabnya diperlukan beberapa sistem bilangan yang lebih sederhana. Berikut penjelasannya:

a. Himpunan – Himpunan Bilangan Penting dari Sistem Bilangan Real

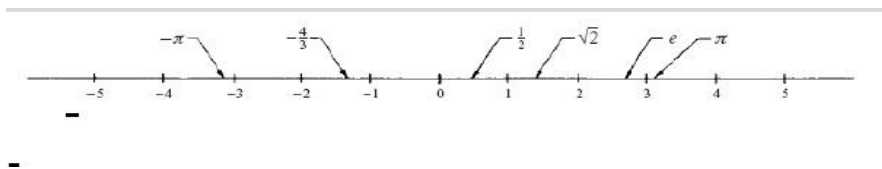
Berkut ini diberikan himpunan-himpunan penting dari sistem bilangan real:

- a) Himpunan bilangan asli, dinotasikan dengan $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Himpunan bilangan asli biasa juga disebut dengan himpunan bilangan bulat positif.
- b) Himpunan bilangan bulat, dinotasikan dengan $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- c) Himpunan bilangan rasional; misalnya $\{16/2, 2/3, \text{dsb}\}$, dinotasikan dengan $\mathbb{Q}$. Secara umum, bentuk bilangan rasional dituliskan sebagai $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, \text{ dan } n \neq 0 \right\}$

- d) Himpunan bilangan irasional; misalnya $\{\sqrt{3}, 2\sqrt{5}, \pi, \text{dsb}\}$ merupakan bilangan yang tidak rasional. Bilangan irasional tidak dapat ditulis dalam bentuk $\frac{m}{n}$ dengan m dan n bilangan bulat dan $n \neq 0$.

b. Bilangan Real $R = Q \cup IR$

Sekumpulan bilangan-bilangan rasional atau irasional disebut *himpunan bilangan real* dan dinyatakan dengan R , sehingga himpunan bilangan real merupakan gabungan himpunan bilangan rasional dengan himpunan bilangan irasional ($R = Q \cup IR$). Himpunan bilangan real dapat dipandang sebagai kumpulan titik-titik sepanjang sebuah garis lurus yang disebut *garis bilangan real*. Setiap titik menyatakan satu bilangan real atau setiap bilangan real dapat dinyatakan oleh sebuah titik dalam garis bilangan real.



Secara umum himpunan bilangan real memuat himpunan bilangan rasional dan himpunan bilangan irasional. Himpunan bilangan rasional memuat himpunan bilangan bulat dan himpunan bilangan bulat memuat himpunan bilangan asli. Hubungan tersebut dinyatakan $N \subset Z \subset Q \subset R$ dan $Q^c \subset R$ dilukiskan seperti diagram dibawah ini



B. Sistem Bilangan Real

Sebagaimana dijelaskan di atas bahwa sistem bilangan adalah himpunan dari bilangan-bilangan beserta sifat-sifatnya, sehingga sistem bilangan real adalah himpunan yang terdiri dari bilangan real beserta sifat-sifat yang dimilikinya. Senada dengan itu (Martono, 1999) mendefinisikan sistem bilangan real adalah himpunan bil riil yang disertai dengan operasi penjumlahan dan perkalian sehingga memenuhi aksioma tertentu. Adapun beberapa sifat bilangan real akan diuraikan sebagai berikut:

a. Sifat – Sifat Bilangan Real

- a) Hukum komutatif : $x + y = y + x$ & $xy = yx$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$
- b) Hukum asosiatif : $x + (y + z) = (x + y) + z$ & $x(yz) = (xy)z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$
- c) Hukum distribusi : $x(y + z) = xy + xz$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$
- d) Elemen-elemen identitas
 - 1) Elemen identitas terhadap penjumlahan adalah 0 yang memenuhi $x + 0 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
 - 2) Elemen identitas terhadap perkalian adalah 1 yang memenuhi $x \cdot 1 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- e) Invers (balikan)
 - 1) Setiap bilangan real x mempunyai balikan aditif (invers terhadap penjumlahan) yang disebut negatif x atau $-x$ yang memenuhi $x + (-x) = 0$
 - 2) Setiap bilangan x mempunyai balikan perkalian (invers terhadap perkalian) yang disebut kebalikan atau x^{-1} , yang memenuhi $x \cdot x^{-1} = 1$

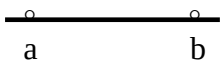
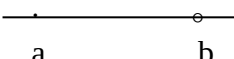
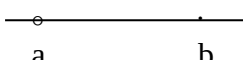
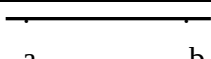
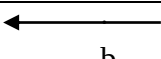
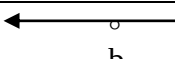
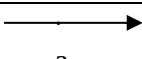
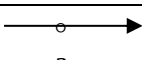
b. Sifat – sifat Urutan

- a) Trikotomi

Jika x dan y adalah bilangan-bilangan, maka pasti satu diantara yang berikut berlaku: $x < y$ atau $x = y$ atau $x > y$
- b) Ketransitifan : $x < y$ dan $y < z \Rightarrow x < z$
- c) Penambahan : $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$
- d) Perkalian
 - 1) Bilangan z positif, $x < y \Leftrightarrow xz < yz$
 - 2) Jika z negatif, $x < y \Leftrightarrow xz > yz$

c. Interval atau Selang

Interval atau selang adalah suatu himpunan bagian dari himpunan bilangan real, bukan berarti setiap himpunan bagian dari $\mathbb{R}$ adalah merupakan selang. Jelasnya bisa dilihat tabel 1.1 berikut:

Penulisan Himpunan	Selang	Dalam Garis Bilangan Real
$\{ x a < x < b \}$	(a,b)	
$\{ x a \leq x < b \}$	$[a,b)$	
$\{ x a < x \leq b \}$	$(a,b]$	
$\{ x a \leq x \leq b \}$	$[a,b]$	
$\{ x x \leq b \}$	$(-\infty, b]$	
$\{ x x < b \}$	$(-\infty, b)$	
$\{ x x \geq a \}$	$[a, \infty)$	
$\{ x x > a \}$	(a, ∞)	

(a,b) disebut sebagai selang terbuka, $[a,b]$ disebut sebagai selang tertutup, sedangkan $[a,b)$, $(a,b]$ disebut sebagai selang setengah terbuka atau setengah tertutup.

d. Pertidaksamaan

Jika $a - b$ adalah bukan bilangan negatif, maka a lebih besar atau samadengan b , ditulis $a \geq b$, atau b lebih kecil dari atau sama dengan a , ditulis $b \leq a$. Jika bilangan tersebut selain $a = b$, maka $a > b$ atau $b < a$. Secara geometri, $a > b$ jika koordinat a berada di sebelah kanan dari koordiat b .

Misalkan a , b , dan c adalah bilangan real. Maka berlaku sifat berikut:

a) Trikotomi

Tepat satu diantara yang berikut ini berlaku: $a > b$, $a = b$, atau $a < b$.

- b) Transitif
Jika $a > b$ dan $b > c$ maka $a > c$
- c) Penambahan
Jika $a > b$ maka $a + c > b + c$
- d) Perkalian
- Jika $a > b$ dan $c > 0$ maka $ac > bc$
 - Jika $a > b$ dan $c < 0$ maka $ac < bc$

Menyelesaikan suatu pertidaksamaan adalah mencari semua himpunan bilangan real yang membuat pertidaksamaan tersebut menjadi suatu pernyataan yang benar. Berbeda dengan persamaan yang himpunan penyelesaiannya umumnya terdiri dari satu bilangan atau mungkin sejumlah berhingga bilangan saja, himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan biasanya terdiri dari suatu keseluruhan interval bilangan atau dalam beberapa kasus gabungan dari interval-interval yang demikian.

Pertidaksamaan $a < x < b$ menunjukkan interval terbuka, dinotasikan dengan (a, b) , yang terdiri dari semua bilangan antara a dan b tidak termasuk a dan b . Sementara $a \leq x \leq b$ menunjukkan interval tertutup, dinotasikan dengan $[a, b]$, yang terdiri dari semua bilangan antara a dan b termasuk a dan b itu sendiri. Selengkapny perhatikan beberapa permasalahan pada tabel 1.1 di atas.

Contoh 1:

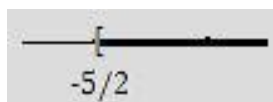
Selesaikan pertidaksamaan $2x - 7 < 4x - 2$ dan perhatikan grafik himpunan penyelesaiannya.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 2x - 7 &< 4x - 2 \\
 \Leftrightarrow 2x &< 4x + 5 \text{ (kedua ruas ditambahkan 7)} \\
 \Leftrightarrow -2x &< 5 \text{ (kedua ruas ditambahkan } (-4x)) \\
 \Leftrightarrow x &> -5/2 \text{ (kedua ruas dikalikan } (-1/2))
 \end{aligned}$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x > -5/2\}$.

Notasi intervalnya adalah $(-5/2, \infty)$. Grafik himpunan penyelesaiannya adalah sebagai berikut:



C. Nilai Mutlak

Dalam system bilangan real, bilangan yang tidak pernah negative didefinisikan sebagai harga mutlak. Nilai mutlak dari suatu bilangan real a , dinotasikan dengan $|a|$, berharga a untuk $a > 0$, $-a$ untuk $a < 0$, dan 0 untuk $a = 0$. Perhatikan notasi berikut:

1. $|x| = x$, jika $x > 0$
2. $|x| = -x$, jika $x < 0$
3. $|x| = 0$, jika $x = 0$

Beberapa sifat dari harga mutlak diberikan sebagai berikut:

1. Untuk a dan b real, berlaku $|a - b| = |b - a|$
2. Jika $a > 0$ maka $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

Akibat dari sifat-sifat di atas adalah:

1. Jika $a > 0$, maka $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
2. Jika $a > 0$, maka $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ atau $x > a$

jika $a > 0$, maka $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$

1. Jika a dan b real maka $|ab| = |a||b|$
2. Jika a dan b real maka $|a + b| \leq |a| + |b|$ (disebut ketidaksamaan segitiga)
3. Jika a dan b real, maka:

$$|a| - |b| \leq |a + b|$$

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

Contoh 2:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $|x - 4| < 2$.

Penyelesaian:

$$|x - 4| < 2$$

$$\Leftrightarrow -2 < x - 4 < 2$$

$$\Leftrightarrow -2 + 4 < x < 2 + 4$$

$$\Leftrightarrow 2 < x < 6$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid 2 < x < 6\}$ atau $(2, 6)$.

Latihan 2.1

1. Himpunan penyelesaian dari masing-masing pertidaksamaan berikut adalah:
 - a. $x^2 - x - 12 \leq 0$
 - b. $9(x - 2)^2 \leq (x + 2)^2$
 - c. $x^2 - 5x - 14 \leq 0, x \in \mathbb{R}$
 - d. $(x - 2)(x + 1) \leq 0, x \in \mathbb{R}$,
 - e. $6x^2 + x - 2 > 0$
 - f. $x^2 - 2x - 3 \leq 0$
 - g. $-2x^2 - 11x - 15 < 0$
 - h. $x^2 - 4x + 4 < 0$
 - i. $-6 < 2x \leq 10$
 - j. $\{(3x - 5)/5\} \leq \{(2 + 3x)/4\}$
 - k. $\{(2x + 3)/(x - 4)\} \geq 0$
 - l. $\{(2x - 5)/(x - 3)\} \leq 1$
2. Selesaikan pertidaksamaan nilai mutlak berikut ini:
 - a. $3 - 2x < 4$
 - b. $12x + 6 \geq 9$
 - c. $2 < 2 - 12x \leq 3$
 - d. $-1 < 4 - 5x < 10$
 - e. $x^2 - 1 < 3$
 - f. $x + 51 - 9x$
 - g. $2x + 10 > -x - 5$
 - h. $x + 7 + 2x + 4 \geq 5$
 - i. $2x - 4 - x + 3 < -1$
3. Nilai $x \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $|2x - 5| < 1$ adalah...
4. Himpunan semua x yang memenuhi pertidaksamaan $|2x + 1| < |2x - 3|$ adalah ...

BAB III

LIMIT DAN KEKONTINUAN

A. Definisi Limit

Limit dalam matematika hampir sama artinya dengan istilah mendekati. Akibatnya, nilai limit sering dikatakan sebagai nilai pendekatan. Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$, berarti bahwa bilamana x dekat tetapi berlainan dari c , maka $f(x)$ dekat ke L . Untuk memahami definisi limit perhatikan contoh berikut:

Diketahui:

Fungsi $f(x) = 2x + 1$, untuk x bilangan real. Berapakah nilai $f(x)$ jika x mendekati 2?

Penyelesaian:

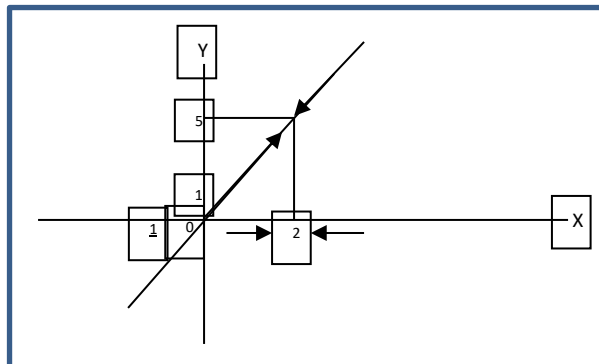
Untuk menentukan nilai $f(x)$ jika x mendekati 2, kita pilih nilai-nilai x disekitar 2 (baik dari kiri maupun dari kanan). Kemudian, kita tentukan nilai $f(x)$ seperti terlihat pada tabel berikut:

Tabel 1. Nilai x disekitaran 2 dari kanan dan kiri

X	1.8	1.9	1.95	1.96	1.97	1.98	1.99	2	2.01	2.02	2.03
f(x)	4.6	4.8	4.9	4.92	4.94	4.96	4.98	5	5.02	5.4	5.06

Dari tabel 1 di atas, tampak bahwa jika x mendekati 2 dari kiri, $f(x)$ mendekati 5 dari kiri, sedangkan jika x mendekati 2 dari kanan, $f(x)$ mendekati 5 dari kanan.

Apabila kita lukis, grafik fungsi $f(x) = 2x + 1$, untuk x mendekati 2 tampak seperti gambar 1 berikut:



Gambar 1. Grafik fungsi $f(x) = 2x + 1$

Ternyata nilai $f(x)$ terus menerus mendekati 5 jika x terus menerus mendekati 2. Di dalam matematika, pernyataan tersebut dapat ditulis dengan $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 5$.

Menghitung Nilai Limit Fungsi Aljabar

Setelah kita mempelajari definisi limit suatu fungsi, kita dapat menentukan limit suatu fungsi dengan menggunakan definisi limit secara umum maupun secara intuitif seperti di atas. Akan tetapi, ada beberapa cara yang lebih sederhana untuk menentukan limit, antara lain: Substitusi; Memfaktorkan dan Merasionalkan penyebut.

a. Menentukan limit dengan substitusi

Nilai suatu fungsi f untuk x mendekati a , dengan a bilangan real, dapat ditentukan dengan substitusi, yaitu mengganti nilai x dengan a .

namun apabila hasilnya $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ atau $(\infty - \infty)$, cara ini tidak dapat diterapkan secara langsung. Fungsi yang diambil limitnya itu perlu disederhanakan lebih dahulu. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 1:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x + 2}$$

Penyelesaian

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x + 2} = \frac{2^3 - 8}{2 + 2} = \frac{0}{4} = 0$$

b. Menentukan limit dengan memfaktorkan

Misalkan terdapat bentuk $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$. Seperti yang telah disinggung

sebelumnya, apabila $x = a$ disubstitusikan pada fungsi yang diambil

limitnya tersebut mengakibatkan $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0}$ (tak tentu), cara substitusi

tidak dapat diterapkan secara langsung. Oleh karena itu, fungsi tersebut perlu disederhanakan lebih dahulu dengan memfaktorkan $f(x)$ dan $g(x)$ sehingga keduanya mempunyai faktor yang sama. Selanjutnya, faktor yang sama itu dihilangkan sehingga diperoleh bentuk yang lebih sederhana seperti berikut:

Contoh 2:

$$\text{Carilah } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - x - 6}{x - 3} \right) =$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - x - 6}{x - 3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x + 2) \\ &= 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

Contoh 3:

$$\text{Carilah } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} =$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} + 1 \\ &= \sqrt{4} + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

c. Menentukan limit dengan merasionalkan penyebut

Apabila dalam suatu fungsi yang akan ditentukan nilai limitnya sulit disederhanakan karena memuat penyebut yang tidak rasional, kita perlu merasionalkan penyebutnya lebih dahulu. Cara merasionalkan penyebut suatu pecahan telah kita pelajari sewaktu sekolah menengah, antara lain:

- Pecahan berbentuk $\frac{a}{\sqrt{b}}$ dikalikan dengan $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$ sehingga diperoleh

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} = \frac{a}{b} \sqrt{b}$$

- Pecahan berbentuk $\frac{c}{a+\sqrt{b}}$ dikalikan dengan $\frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$ sehingga diperoleh

$$\frac{c}{a+\sqrt{b}} = \frac{c}{a+\sqrt{b}} \times \frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \frac{c(a-\sqrt{b})}{a-b}$$

Contoh 4:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} =$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} \times \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2+3-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{x+1} \\ &= \frac{\sqrt{4}+2}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Latihan 3.1:

Carilah limit di bawah ini (Lihat Contoh1) :

$$1. \lim_{x \rightarrow 4} (2x - 10) =$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{3}{x} + 1 \right) =$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - 2x + 1) =$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{11 + x^2}}{x - 3} =$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\sqrt{12 - x^2}}{x^4} =$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{\sqrt{20 - x^2}}{x^6} =$$

Carilah limit di bawah ini (Lihat ex: 2 - 4)

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} =$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 2} =$$

$$9. \lim_{t \rightarrow -3} \frac{2t^2 + 5t - 3}{t + 3} =$$

$$10. \lim_{y \rightarrow -2} \frac{2y^2 - 5y - 12}{y - 4} =$$

$$11. \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^3 - 25u}{u^2 - 5u} =$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{x - 16}{\sqrt{x} - 4} =$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x + 2} =$$

B. Pengkajian Mendalam Tentang Limit

a. Limit Fungsi

Suatu fungsi $f(x)$ dikatakan mendekati 2 ($f(x) \rightarrow L$) sebagai suatu limit, bila x mendekati a ($x \rightarrow a$) atau $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, apabila untuk setiap bilangan ($\varepsilon > 0$) diperoleh $\delta > 0$, sedemikian sehingga untuk setiap nilai x yang memenuhi $|x - a| < \delta$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Contoh 5:

Buktikan bahwa $\lim_{x \rightarrow 4} 5x - 3 = 17$

Penyelesaian:

Pada setiap $\varepsilon > 0$ kita harus menemukan $\delta > 0$ sehingga $|x - 4| < \delta$ berlaku $|(5x - 3) - 17| < \varepsilon$. Kita mulai dengan mencari suatu pertaksamaan yang memuat $|x - 4|$ yang ekuivalen dengan pertaksamaan $|(5x - 3) - 17| < \varepsilon$.

Pada soal : $f(x) = 5x - 3$
 $L = 17$
 $a = 4$

maka : $|f(x) - L| < \varepsilon$.

$$|(5x - 3) - 17| < \varepsilon$$

$$17 - \varepsilon < 5x - 3 < 17 + \varepsilon \rightarrow (\text{berdasarkan rumus nilai mutlak})$$

$$17 - \varepsilon + 3 < 5x < 17 + \varepsilon + 3$$

$$20 - \varepsilon < 5x < 20 + \varepsilon$$

$$\frac{20 - \varepsilon}{5} < x < \frac{20 + \varepsilon}{5}$$

$$4 - \frac{\varepsilon}{5} < x < 4 + \frac{\varepsilon}{5}$$

$$-\frac{\varepsilon}{5} < x - 4 < \frac{\varepsilon}{5}$$

$$|x - 4| < \frac{\varepsilon}{5} \quad \text{dengan memisalkan } \frac{\varepsilon}{5} = \delta \text{ maka:}$$

$$|x - 4| < \delta$$

Jadi : $|x - 4| < \delta$ berlaku $|(5x - 3) - 17| < \varepsilon$

b. Limit Suatu Barisan

Misalkan suatu barisan bilangan asli: $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \dots \dots 2 - \frac{1}{n} \dots$

bila $n \rightarrow \infty$ maka $2 - \frac{1}{n}$ mendekati 2. Keadaan seperti ini dinyatakan bahawa limit barisan di atas adalah 2.

Definisi

Suatu barisan C_n dikatakan mempunyai Limit (L) bila setiap Bil. Positif atau $\varepsilon > 0$ yang ditentukan oleh bagaimanapun kecilnya dapat di tentukan suatu indeks/ nilai (N) sedemikian sehingga $n > N$ dipenuhi harga mutlak $|L - C_n| < \varepsilon$.

Contoh 6 :

Buktikan bahawa barisan bilangan $\left[3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$ mempunyai Limit 3

Penyelesaian :

$$\text{Bukti } C_n = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$L = 3$$

$$\text{Maka } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 3$$

Berdasarkan definisi $|L - C_n| < \varepsilon$, maka $\left|3 - \left[3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\right| < \varepsilon$.

$$\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right| < \varepsilon \rightarrow \text{misalkan ambil } \varepsilon = 10^{-6}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-6} \rightarrow \text{kedua ruas di log menjadi seperti di bawah ini}$$

$$\text{Log } (2^{-1})^n < \text{log } 10^{-6}$$

$$-n \cdot \log 2 < -6 \cdot \text{Log } 10$$

$$-n \cdot 0,301 < -6$$

$-n \cdot 0,301 < -6 \rightarrow$ ke 2 ruas dikalikan (-1) sehingga tanda < berubah menjadi >

$$n \cdot 0,301 > 6$$

$$n > \frac{6}{0,301} \approx 19$$

$$n > 19$$

Jadi, $n > 19$ maka $\left[3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$ hasilnya mendekati 3

c. Limit Kiri dan Limit Kanan

Limit kiri dan kanan, jika:

1. Jika x menuju c dari arah kiri (dari arah bilangan yang lebih kecil dari c), limit disebut limit kiri, notasi

$$\overbrace{\quad\quad\quad}^{x \longrightarrow c} \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$$

2. Jika x menuju c dari arah kanan (dari arah bilangan yang lebih besar dari c), limit disebut limit kanan, notasi

$$\overbrace{\quad\quad\quad}^{x \longrightarrow c} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

Hubungan antara limit dengan limit sepihak(kiri/kanan)

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

Jika

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \text{ maka } \lim_{x \rightarrow c} f(x) \text{ tidak ada}$$

Contoh 7:

Diketahui:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 2 + x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

Ditanya:

- Hitung $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
 - Hitung $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
 - Hitung $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
 - Gambarlah grafik $f(x)$
- } Jika ada

Penyelesaian:

- Karena aturan fungsi berubah di $x=0$, maka perlu dicari limit kiri dan limit kanan di $x=0$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

- b. Karena aturan fungsi berubah di $x=1$, maka perlu dicari limit kiri dan limit kanan di $x=1$

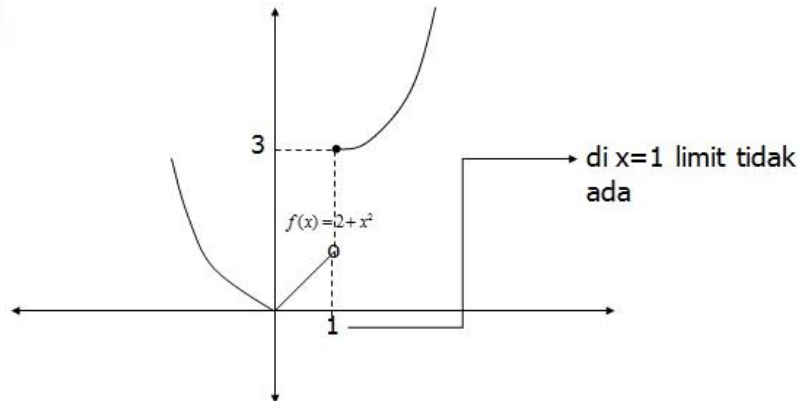
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 + x^2 = 3 \end{array} \right\} \text{ Karena } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ tidak ada.}$$

- c. Karena aturan fungsi **tidak berubah** di $x=2$, maka **tidak perlu** dicari limit kiri dan limit kanan di $x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 2 + x^2 = 6$$

- d. Gambar grafiknya:

Grafik $f(x)$



Untuk $x \leq 0$

$$f(x) = x^2$$

Grafik: parabola

Untuk $0 < x < 1$

$$f(x) = x$$

Grafik: garis lurus

Untuk $x \geq 1$

Grafik: parabola

d. Teorema Limit

Teorema limit utama: Andaikan n bilangan bulat positif, k konstanta, f dan g adalah fungsi – fungsi yang memenuhi limit di c .

1. Jika $f(x) = c$, suatu konstanta, maka $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$
2. Jika $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ dari $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$

Maka:

- a. $\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \cdot A$; $c = \text{konstant}$

$$\begin{aligned}
\text{b. } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\
&= A \pm B \\
\text{c. } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\
&= A \cdot B \\
\text{d. } \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B} \\
\text{e. } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} &= \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \\
\text{f. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} &= 0
\end{aligned}$$

Teorema - teorema tersebut tidak dapat digunakan jika $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ dan $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$.

Contoh 8:

$$\text{Carilah } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x} = \infty \text{ dan } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x^2} = \infty$$

Penyelesaian:

Karena hasil tak hingga maka teorema “d” tidak terpakai sehingga

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-x^2}{1} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{(1+x)(1-x)}{1} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} (x \cdot (1+x)) \\
&= 1 \cdot (1+1) \\
&= 1 \cdot 2 = 2
\end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan soal-soal $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$, mula – mula dengan membagi pembilang dan penyebut dengan pangkat tertinggi dari variabel yang ada, kemudian gunakan teorema limit

Contoh 9:

$$\text{Carilah } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 8x}{4x^2 - 3x} =$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \sim} \frac{3x^2 + 8x}{4x^2 - 3x} &= \lim_{x \rightarrow \sim} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{8x}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \sim} \frac{3 + \frac{8}{x}}{4 - \frac{3}{x}} \\
 &= \frac{3 + \frac{8}{\sim}}{4 - \frac{3}{\sim}} \\
 &= \frac{3+0}{4+0} = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

Contoh 10:

Hitunglah nilai limit berikut ini:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 6x) =$
2. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-25} =$
3. $\lim_{x \rightarrow \sim} \frac{x^2 + x - 2}{4x^2 - 1} =$
4. $\lim_{x \rightarrow 2} [(x^2 + 1)(3x - 11)] =$

Pembahasan:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 6x) = 2^2 - 6 \cdot 2$
 $= 4 - 12$
 $= -8$
2. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-25} = \frac{\lim_{x \rightarrow 5} x-5}{\lim_{x \rightarrow 5} x^2-25}$
 $= \frac{x-5}{(x-5)(x+5)} = \frac{1}{(5+5)} = \frac{1}{10}$
3. $\lim_{x \rightarrow \sim} \frac{x^2 + x - 2}{4x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \sim} \frac{\frac{x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3} - \frac{2}{x^3}}{\frac{4x^2}{x^3} - \frac{1}{x^3}}$
 $= \lim_{x \rightarrow \sim} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}}{4 - \frac{1}{x^3}}$
 $= \frac{0+0-0}{4-0} = \frac{0}{4} = 0$
4. $\lim_{x \rightarrow 2} [(x^2 + 1)(3x - 11)] = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 11)$
 $= (4 + 1) \cdot (6 - 11)$
 $= 5 \cdot -5$
 $= -25$

Latihan 3.2:

Hitunglah nilai limit berikut ini:

1. Tentukan konstanta c agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 3 - cx, & x < -1 \\ x^2 - c, & x \geq -1 \end{cases}$$

Mempunyai limit di $x = -1$

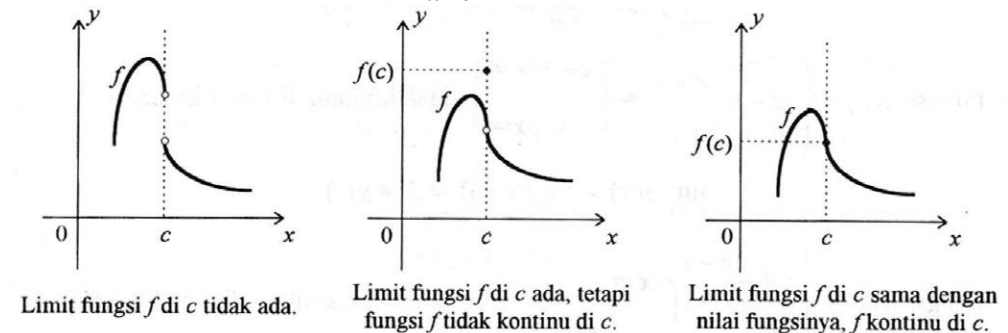
2. $\lim_{x \rightarrow -3} (x^3 - 4x + 8) =$
3. $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{5x^2 + 2x} =$
4. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x}{3x^3 + 24} =$
5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} =$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^2 + x - 3}{3x^4 + 2} =$
7. $\lim_{x \rightarrow -1} [(x^2 - 2)(2x + 10)] =$
8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} =$
9. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{x-3} =$
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x^3 - 5x + 6}{2x^4 - 4x^2 + 9} =$
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x^3 - 5x + 6}{2x^3 - 4x^2 + 9} =$
12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x^3 - 5x + 6}{2x^4 - 4x^2 + 9} =$

C. Kekontinuan Fungsi

a. Kekontinuan fungsi di satu titik

Definisi

Fungsi f terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat c . Fungsi f dikatakan kontinu di c jika limit $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.



Limit suatu Fungsi f pada bilangan c seringkali dapat ditentukan dengan menghitung $f(c)$ yaitu nilai f di c .

Misal :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} (4x^3 - 2x + 5) &= 4(-2)^3 - 2(-2) + 5 \\ &= 4 \cdot -8 + 4 + 5 \\ &= -32 + 9 \\ &= -23 \end{aligned}$$

Akan tetapi untuk beberapa fungsi lainnya, cara di atas tidak selalu mungkin, misalnya $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + x}{x}$, oleh karena itu bentuk fungsi pecahan harus disederhanakan terlebih dahulu.

b. Kekontinuan kiri dan kanan

Definisi:

Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang $(a, c]$. Fungsi f dikatakan kontinu kiri dan c

c. Fungsi Kontinu

Sebuah fungsi $f(x)$ dikatakan kontinundi c jika memenuhi 3 syarat, sebagai berikut:

- a. $f(c)$ ada nilai
- b. $\lim_{x \rightarrow c} f(c)$ ada
- c. $f(c) = \lim_{x \rightarrow c}$

Contoh 11 :

Tunjukkan bahawa $f(x) = x^2 - 1$ kontinu di $x = 2$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1) \\ &= 2^2 - 1 \\ &= 5 \\ \bullet f(x) &= x^2 - 1 \\ f(2) &= 2^2 - 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Jadi, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

Catatan : apabila limit dan $f(x)$ tidak sama hasilnya atau $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(c)$.

maka disebut diskontinu. Ketiga syarat tersebut dipenuhi oleh fungsi tersebut, jadi fungsi $f(x) = x^2 - 1$ kontinu di $x = 2$.

d. Diskontinu

Suatu fungsi $f(x)$ disebut diskontinu pada $x = c$ jika satu atau lebih syarat untuk kontinuitas tidak berlaku dititik tersebut.

Contoh 12 :

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x - 14}{x - 2} \text{ diskontinu pada titik } x = 2$$

Penyelesaian:

Bukti: Dilimitkan

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x - 14}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+7)}{(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 7) \\ &= 2 + 7 = 9 \text{ (ada nilai)} \end{aligned}$$

Disubstitusikan

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^2 + -5x - 14}{x-2} \\f(2) &= \frac{(2)^2 + 5(2) - 14}{2-2} \\&= \frac{4+10-14}{0} \\&= \frac{0}{0} = \sim \text{ (tidak terdefinisi)}\end{aligned}$$

Karena $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$, maka fungsi $f(x) = \frac{x^2 + -5x - 14}{x-2}$ diskontinu di titik $x = 2$. Artinya [fungsi itu akan kontinu pd semua titik kec di titik $x = 2$]

Beberapa jenis diskontinu akan dijelaskan pada contoh berikut:

Contoh 13:

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \text{ diskontinu pada titik } x = 2$$

Penyelesaian:

Bukti: dilimitkan

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \\&= \frac{1}{2-2} \\&= \frac{1}{0} = \sim\end{aligned}$$

Disubstitusikan

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{x-2} \\f(2) &= \frac{1}{2-2} \\&= \frac{1}{0} = \sim\end{aligned}$$

Jadi, fungsi $f(x) = \frac{1}{x-2}$ di katakan diskontinu tak berhingga di titik $x = 2$.

Contoh 14:

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x-4}, \text{ diskontinu di } x = 4$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+4)(x-4)}{x-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} (x+4) \\ &= 4 + 4 = \mathbf{8}\end{aligned}$$

Disubstitusikan

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^2 - 16}{x - 4} \\ f(4) &= \frac{4^2 - 16}{4 - 4} \\ &= \frac{0}{0} = \sim \text{ (tidak terdefinisi) }\end{aligned}$$

Karena $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(4)$, maka fungsi $f(x)$ tersebut diskontinu dapat dihapuskan, artinya fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ dapat menjadi kontinu dengan mendefinisikannya kembali menjadi $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$, $x \neq 4$ dan $f(4) = 8$.

Latihan 3.3:

Tunjukkan bahwa:

1. $f(x) = x^2 - 1$ kontinu di $x = 3$
2. $f(x) = 2x^2 + x - 1$ kontinu di $x = 1$
3. $f(x) = 4x^2 - 2x + 12$ kontinu di $x = 2$
4. $f(x) = \frac{8}{x-1}$ kontinu di $x = 2$
5. $g(x) = \frac{3x^2}{x-2}$ kontinu di $x = 2$
6. $h(x) = \sqrt{x-3}$ kontinu di $x = 2$
7. $h(x) = \frac{4t-8}{t-2}$ kontinu di $x = 2$
8. Buktikan fungsi $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$; $x \neq 3$ dan $f(3) = 5$ diskontinu di $x = 3$, dan berikan alasannya
9. Suatu fungsi $f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x-2}$; $x \neq 2$ dan $f(2) = 5$. Apakah fungsi tersebut kontinu di $x = 2$? Mengapa?
10. Suatu fungsi f didefinisikan sebagai $f(x) = \frac{9x^2-4}{3x+2}$; $x \neq -\frac{2}{3}$, nilai apakah yang harus diberikan pada $f\left(-\frac{2}{3}\right)$ supaya fungsi tersebut kontinu pada $x = -\frac{2}{3}$

BAB IV DIFERENSIAL

A. Definisi

Turunan suatu fungsi $y = f(x)$ terhadap x pada titik $x = x_0$ didefinisikan sebagai :

$$\lim_{\Delta x} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Definisi limit di atas disebut juga laju perubahan sesaat dari fungsi y terhadap x pada $x = x_0$. Dalam penyelesaian turunan index 0 biasanya di hilangkan dengan turunan dari $y = f(x)$ terhadap x yang diperoleh :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Turunan $y = f(x)$ terhadap x dapat dinyatakan oleh salah satu bentuk berikut:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = D_x y = \frac{d}{dx} (y) = \frac{d}{dx} [f(x)]$$

Contoh 1 :

Tentukan turunan fungsi $y = x^2 + 3x$ dengan definisi limit.

$$y = x^2 + 3x \text{ turunannya } y' = 2x + 3$$

Penyelesaian:

Bukti:

$$y = x^2 + 3x$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x)] - (x^2 + 3x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x\Delta x + \Delta x^2 + \cancel{3x} + 3\Delta x - \cancel{x^2} - \cancel{3x}}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x \Delta x + \Delta x^2 + 3 \Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x (2x + \Delta x + 3)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x + 3 \\
&= 2x + 0 + 3 \\
&= 2x + 3
\end{aligned}$$

Jadi terbukti sama dengan turunannya $y' = 2x + 3$

Latihan 4.1 :

Carilah $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi berikut

1. $y = \frac{1}{x-2}$
2. $f(x) = \sqrt{3x}$
3. $f(x) = \sqrt{x-5}$
4. $y = 5x - 4$
5. $y = 4x^2 - 1$

B. Diferensial Fungsi Aljabar

Menentukan derivatif suatu fungsi langsung dengan menggunakan definisi turunan, yaitu menarik limit hasil bagi diferensial membutuhkan waktu yang lama dan tidak selalu mudah. Untuk itu dipergunakanlah teorema-teorema dari diferensial dalam bentuk rumus-rumus. Suatu fungsi dikatakan dapat dideferensialkan di $x = x_0$, jika fungsi tersebut mempunyai turunan dititik tersebut.

Rumus-rumus diferensial

Fungsi u , v , dan w adalah fungsi yang dapat dideferensialkan dalam rumus-rumus berikut:

1. Jika k = konstanta dan $f(x) = k$, maka $\frac{d}{dx} (k) = 0$
2. Jika $y = x$, maka $\frac{d}{dx} (y) = 1$
3. Jika $y = u + v + w$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (u) + \frac{d}{dx} (v) + \frac{d}{dx} (w)$
4. Jika $y = k \cdot u$, maka $\frac{dy}{dx} = k \cdot \frac{d}{dx} (u)$

5. Jika $y = u \cdot v$, maka $\frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{d}{dx}(u) + u \cdot \frac{d}{dx}(v)$ atau dapat ditulis $u' \cdot v + u \cdot v'$

6. Jika $y = \frac{u}{v}$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \frac{d}{dx}(u) - u \cdot \frac{d}{dx}(v)}{v^2}$ atau dapat ditulis $\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

7. Jika $y = x^m$, maka $\frac{dy}{dx} = m \cdot x^{m-1}$

Contoh 2:

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi trigonometri berikut:

1. $y = 4x^2 - 5x + 1$

2. $f(x) = (x + 5) \cdot \sqrt{x}$

3. $y = (x^2 + 3x + 2)^2$ (akan di bahas dalam materi selanjutnya)

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} 1. \quad y' &= 4 \cdot 2x^{2-1} - 5 \cdot 1x^{1-1} + 0 \\ &= 8x - 5x^0 \\ &= 8x - 5 \cdot 1 \\ &= 8x - 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad y' &= u' \cdot v + u \cdot v' \\ &= 1 \cdot \sqrt{x} + (x + 5) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{x+5}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} + (x+5)}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2x+x+5}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3x+5}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$u = (x + 5), \quad u' = 1$$

$$v = \sqrt{x}, \quad v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad y' &= (x^2 + 3x + 2)^2 \\ &= 2(x^2 + 3x + 2) \cdot (2x + 3) \\ &= (4x + 6)(x^2 + 3x + 2) \end{aligned}$$

Latihan 4.2:

Tentukan turunan dari fungsi berikut:

1. $y = \frac{-8}{x^{10}}$

2. $y = \frac{3}{5x^5}$

3. $y = x(x^2 + 1)$

4. $y = 3x(x^2 - 1)$

5. $y = \frac{2}{x} + \frac{6}{\sqrt{x^3}} - \frac{6}{\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}$

6. $y = \frac{3x^2 - 4x + 10}{x^2 + 2x - 11}$

7. $y = 2x^2 \cdot \sqrt{x}$

8. $y = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{x} - 3$

9. $g(x) = \frac{2x^2 - 5x + 1}{x}$

10. $h(x) = e^{3x} \cdot \sin(2x)$

11. $m(x) = (x^2 + 1)^3$

12. $g(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}$

13. $h(x) = \frac{3x^2 - 4}{6x}$

14. $p(x) = \frac{3x^2 - 2x + 5}{x^2 + 1}$

15. $q(x) = \sin(2x) \cdot \cos(3x)$

C. Aturan Rantai

Aturan rantai (*chain rule*) menyatakan bahwa turunan dari $f(g(x))$ adalah $f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Dengan kata lain, aturan rantai digunakan untuk mencari turunan komposisi dua fungsi atau lebih. Aturan rantai memungkinkan kita untuk mencari turunan komposisi dua fungsi atau lebih. Komposisi fungsi yang biasanya diturunkan dengan aturan rantai adalah bentuk pangkat dari fungsi aljabar yang terdiri dari beberapa suku.

Misalkan $y = f(u)$ da $u = g(x)$ menentukan fungsi komposisi $y = f(g(x)) = f \circ g(x)$ jika g terdeferensial di x dan f terdeferensial di $u = g(x)$ maka $f \circ g$ terdeferensialkan di x dan $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ atau $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Perhatikan contoh berikut ini:

Contoh 3a :

Carilah $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi berikut:

1. $y = (2x + 1)^2$

2. $y = \sqrt[3]{x^3 - 4}$

Penyelesaian:

1. $y = (2x + 1)^2$

Cara I:

Misal: $u = 2x + 1 \rightarrow \frac{du}{dx} = 2$

Sehingga: $y = u^2 \rightarrow \frac{dy}{du} = 2u$
 $= 2(2x + 1)$
 $= 4x + 2$

Jadi: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$
 $= (4x + 2) \cdot 2$
 $= 8x + 4$

Cara II:

$$y = (2x + 1)^2$$

$$y' = 2(2x + 1) \cdot 2$$

$$y' = (4x + 2) \cdot 2$$

$$y' = 8x + 4$$

2. $y = \sqrt[3]{x^3 - 4}$
 $= (x^3 - 4)^{\frac{1}{3}}$
 $y' = \frac{1}{3}(x^3 - 4)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (3x^2)$
 $y' = x^2 (x^3 - 4)^{-\frac{2}{3}}$
 $= \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 - 4)^2}}$

Contoh 3b :

Hitung turunan fungsi berikut terhadap variabel x :

$$m(x) = (x^2+1)^3$$

Penyelesaian:

$$m'(x) = \frac{d}{dx} ((x^2+1)^3)$$

$$m'(x) = 3(x^2+1)^2 \cdot 2x$$

$$m'(x) = 6x(x^2+1)^2$$

Latihan 4.3:

Tentukanlah $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi berikut:

1. $y = (-3x + 2)^2$
2. $y = (2x^2 + 5x - 1)^4$
3. $y = \sqrt{(5x^2 + 6x)^3}$
4. $y = (1 - 2x^2)^{10}$
5. $y = \sqrt{(1 + x + x^2)}$
6. $y = \cos^4(3 - 4x^2)$
7. $y = (2x+1)^4$
8. $t(x) = (4x^2 - 3x + 1)e^{2x}$
9. $y = \sqrt{4x^3 + 2x + 1}$
10. $y = \sin(2x + 1)$

D. Diferensial Fungsi Trigonometri

Untuk menentukan turunan trigonometri sama dengan konsep awal mencari turunan, namun disini langsung kita ambil hasilnya dimana

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

maka Turunan pada fungsi trigonometri sebagai berikut, Misalkan u adalah fungsi x yang dapat dideferensialkan sehingga:

- a. $y = \sin u \rightarrow y' = \cos u \cdot \frac{du}{dx}$
- b. $y = \cos u \rightarrow y' = -\sin u \cdot \frac{du}{dx}$
- c. $y = \tan u \rightarrow y' = \sec^2 u \cdot \frac{du}{dx}$
- d. $y = \cot u \rightarrow y' = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot \frac{du}{dx}$
- e. $y = \sec u \rightarrow y' = \sec^2 u \cdot \tan u \cdot \frac{du}{dx}$
- f. $y = \operatorname{cosec} u \rightarrow y' = -\operatorname{cosec} u \cdot \cot u \cdot \frac{du}{dx}$

Contoh 4:

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi trigonometri berikut:

- 1. $y = \sin 2x + \tan 3x^2$
- 2. $y = x \cdot \cos 5x$
- 3. $y = \sin^2 4x$
- 4. $y = \frac{1}{2} \tan x \cdot \sin 2x$
- 5. $y = \sec^3 \sqrt{x}$

Penyelesaian:

- 1. $y' = \cos 2x \cdot 2 + \sec^2 3x^2 \cdot 6x$
 $y' = 2 \cos 2x + 6x \cdot \sec^2 3x^2$
- 2. $u = x, u' = 1$ dan $v = \cos 5x, v' = -\sin 5x \cdot 5$
 $u' \cdot v + u \cdot v'$
 $y' = 1 \cdot \cos 5x + x \cdot -\sin 5x \cdot 5$
 $y' = \cos 5x + 5x \cdot -\sin 5x$
 $y' = \cos 5x - 5x \cdot \sin 5x$

3. $y' = 2 \cdot \sin 4x \cdot \cos 4x \cdot 4$
 $= 4 \cdot 2 \cdot \sin 4x \cdot \cos 4x \rightarrow$ menurut aturan trigono: $\sin 2x = 2$
 $\sin x \cdot \cos x$
 $= 4 \cdot \sin 2 (4x)$
 $= 4 \cdot \sin 8x$
4. $u = \frac{1}{2} \tan x, u' = \frac{1}{2} \sec^2 x \cdot 1$ dan $v = \sin 2x, v' = \cos 2x \cdot 2 = 2 \cdot \cos 2x$
 $u' \cdot v + u \cdot v'$
 $y' = \frac{1}{2} \sec^2 x \cdot \sin 2x + \frac{1}{2} \tan x \cdot 2 \cdot \cos 2x$
 $y' = \frac{1}{2} \sec^2 x \cdot \sin 2x + 2 \cdot \frac{1}{2} \tan x \cdot \cos 2x$
 $y' = \frac{1}{2} \sec^2 x \cdot \sin 2x + \tan x \cdot \cos 2x$
5. $y' = \sec^3 \sqrt{x}$
 $= 3 \cdot \sec^2 \sqrt{x} \cdot \sec \sqrt{x} \cdot \tan \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2}$
 $= 3 \sec^3 \sqrt{x} \cdot \tan \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Latihan 4.4

1. $y = \sin (2x)$
2. $y = \cos^2 (x)$
3. $y = \tan (3x)$
4. $y = \cot^2 (4x)$
5. $y = \sin(x) \cdot \cos(2x)$
6. $y = \tan^2 (5x)$

E. Diferensial Parsial

Diferensial parsial atau diferensial tingkat tinggi adalah mendiferensialkan suatu fungsi beruang kali (y^n). Sebuah fungsi f akan menghasilkan sebuah fungsi baru f' (f aksen) disebut turunan pertama. F' masih menghasilkan fungsi lain yang dinyatakan oleh f'' (f dua aksen) disebut turunan kedua. Pada situasi berbeda fungsi tersebut dapat diturunkan lagi yang dinyatakan oleh f''' yang disebut turunan ketiga, begitu seterusnya.

Contoh 5 :

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 8$$

Maka :

$$f'(x) = 12x^2 - 6x + 5$$

$$f''(x) = 24x - 6$$

$$f'''(x) = 24$$

$$f''''(x) = 0$$

Latihan 4.5 :

Tentukan turunan kedua dari fungsi berikut:

1. $y = 7x^4 - 5x^2 + 3$

2. $y = \cos x^2$

3. $y = x \cdot \sin x$

Tentukan $\frac{d^3y}{d^3x}$ dari fungsi di bawah ini:

4. $y = x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

5. $y = (2x + 5)^4$

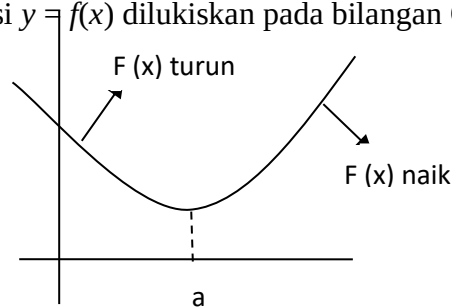
6. $y = \sin 3x$

F. Penggunaan Diferensial

a. Aplikasi Turunan Fungsi

Fungsi naik dan fungsi turun

Misalkan grafik suatu fungsi $y = f(x)$ dilukiskan pada bilangan Cartesius



Untuk grafik diatas kita dapat menyatakan bahawa

1. $f(x)$ adalah fungsi turun dalam interval $x < a$
2. $f(x)$ adalah fungsi naik dalam interval $x > a$

Pengertian fungsi naik dan turun dapat didefinisikan sebagai berikut:

- a. fungsi $f(x)$ dikatakan naik dalam interval I jika setiap bilangan x_1 dan x_2 dalam I dan $x_1 < x_2$ maka berlaku hubungan $f(x_1) < f(x_2)$
[ditulis $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$]
- b. fungsi $f(x)$ dikatakan turun dalam interval I jika setiap bilangan x_1 dan x_2 dalam I dan $x_1 < x_2$ maka berlaku hubungan $f(x_1) > f(x_2)$
[ditulis $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$]

Teorema:

“misalkan fungsi f kontinu dalam interval I dan dideferensialkan disetiap titik dalam interval tersebut”

- i. Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap x dalam interval I, maka fungsi $f(x)$, naik dalam interval I
- ii. Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap x dalam interval I, maka fungsi $f(x)$, turun dalam interval I
- iii. Untuk menentukan nilai stasioner syaratnya adalah $f'(x) = 0$

Contoh 6:

Sebuah kurva dinyatakan dalam rumus $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

- Tentukan interval – interval x agar $f(x)$ fungsi naik dan $f(x)$ fungsi turun
- Gambarlah sketsa parabola tersebut

Penyelesaian:

a. Menentukan interval

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3.$$

$$f'(x) = -2x + 2$$

$f(x)$ fungsi naik jika $f'(x) > 0$

$$f'(x) > 0$$

$$-2x + 2 > 0$$

$$-2x > -2$$

$$2x < 2$$

$$x < 1$$

$f(x)$ fungsi turun jika $f'(x) < 0$

$$f'(x) < 0$$

$$-2x + 2 < 0$$

$$-2x < -2$$

$$2x > 2$$

$$x > 1$$

Jadi $f(x)$ adalah fungsi naik pada interval $(-\infty, 1]$ dan $f(x)$ adalah fungsi turun pada interval $[1, \infty)$

b. Menggambar kurva

Syarat menggambar kurva

Grafik memotong $x \rightarrow y = 0$

$$y = -x^2 + 2x + 3$$

$$0 = (-x + 3)(x + 1)$$

$$x_1 = 3 \text{ dan } x_2 = -1$$

Grafik memotong $y \rightarrow x = 0$

$$y = -x^2 + 2x + 3$$

$$y = -(0)^2 + 2(0) + 3$$

$$y = 3$$

titik potong pada sumbu x di subsitusikan ke persamaan awal , sehingga diperoleh titik potong y , sebagai berikut:

X	-1	0	1	2	3
Y	0	3	4	3	0

Sumbu simetri pada kurva: $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Nilai stationer (Untuk menentukan puncak) (x, F(x))

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3.$$

$$F(1) = -(1)^2 + 2(1) + 3$$

$$= 1 + 2 + 3$$

$$= 6$$

b. Nilai Stationer

Jika suatu fungsi $y = f(x)$ kontinu dan diferensial di $x = a$ dan $f'(x) = 0$, maka $f(a)$ merupakan nilai stationer dari fungsi $f(x)$ di $x = a$

Pada grafik di bawah:

- Nilai x yang menyebabkan $f(x)$ mempunyai nilai stationer dapat ditentukan dari syarat $f'(x) = 0$
- Titik $(a, f(a))$ disebut dengan titik stationer atau kritis
- Nilai Stationer $f(a)$ sering disebut nilai kritis/ nilai maksimum atau minimum.

Contoh 7

Tentukan nilai stationer fungsi $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 10$ dan tentukan pula titik stationernya.

Penyelesaian:

Fungsi $f(x)$ mempunyai nilai stationer dengan syarat $f'(x) = 0$, maka

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 10$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

$$6x^2 + 6x - 12 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x_1 = -2 \text{ atau } x_2 = 1$$

Nilai stationer untuk $x_1 = -2$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) - 10 \\ &= 2 \cdot -8 + 3 \cdot 4 + 24 - 10 \\ &= -16 + 12 + 24 - 10 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Jadi titik stationernya $(-2, 10)$

Nilai stationer untuk $x_2 = 1$

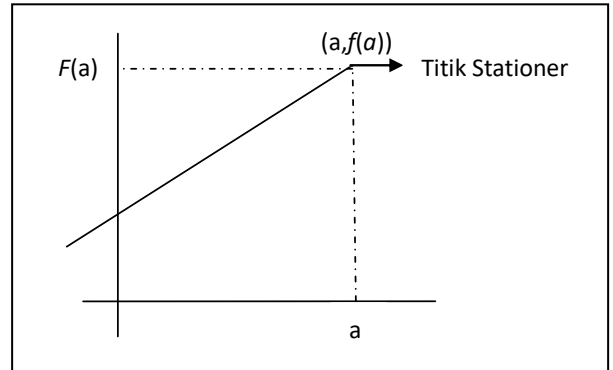
$$\begin{aligned} f(x) &= 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) - 10 \\ &= 2 + 3 - 12 - 10 \\ &= -17 \end{aligned}$$

Jadi titik stationernya $(1, -17)$

Latihan 4.6:

Suatu fungsi kuadrat dengan rumus $f(x) = x^2 - 3px + 8$. Fungsi kuadrat tersebut mencapai nilai stationer untuk $x = 6$

- Hitunglah nilai p
- Hitunglah nilai stationernya
- Tentukan pula titik stationernya



c. Jenis – jenis Nilai Stationer

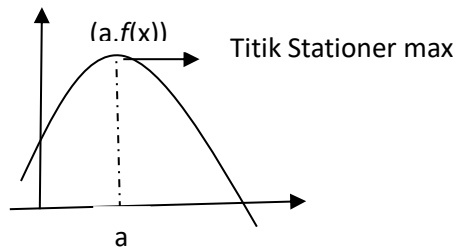
Jenis – jenis nilai stationer dari suatu fungsi dapat diselidiki dengan mengamati perubahan $f'(x)$.

a) Nilai stationer Maksimum (nilai balik)

Misalkan fungsi $f(x)$ kontinu dalam interval $b < x < a$ yang memuat $x = a$. Fungsi $F(x)$ dikatakan mempunyai nilai stationer max. $f(a)$ jika:

- $f'(x) > 0$ dalam interval $b < x < a$ atau fungsi $f(x)$ naik
- $f'(x) = 0$ untuk $x = a$ atau fungsi $f(x)$ tidak naik dan tidak turun
- $f'(x) < 0$ dalam interval $b < x < a$ atau fungsi $f(x)$ turun

Grafiknya adalah:

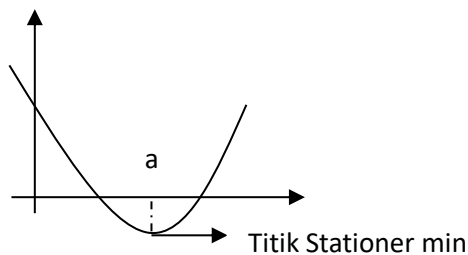


b) Nilai stationer Minimum

Fungsi $f(x)$ dikatakan mempunyai nilai stationer minimum $f(a)$ jika:

- $f'(x) < 0$ dalam interval $b < x < a$ atau fungsi $f(x)$ turun
- $f'(x) = 0$ untuk $x = a$ atau fungsi $f(x)$ tidak naik dan tidak turun
- $f'(x) > 0$ dalam interval $b < x < a$ atau fungsi $f(x)$ naik

Grafiknya adalah

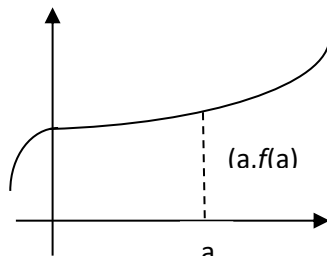


c) Nilai stationer Horizontal

Fungsi $f(x)$ dikatakan mempunyai nilai stationer horizontal $f(a)$ jika :

- $f'(x) > 0$, fungsi $f(x)$ naik
- $f'(x) = 0$, fungsi $f(x)$ tidak naik dan tidak turun
- $f'(x) < 0$, fungsi $f(x)$ turun

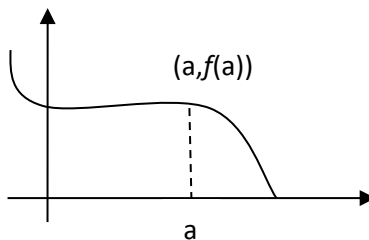
Grafiknya adalah



Atau Fungsi $f(x)$ dikatakan mempunyai nilai stationer horizontal $f(a)$ jika :

- $f'(x) < 0$, fungsi $f(x)$ turun
- $f'(x) = 0$, fungsi $f(x)$ tidak naik dan tidak turun
- $f'(x) < 0$, fungsi $f(x)$ turun

Grafiknya adalah



Contoh 3:

Tentukan nilai stationer dan jenisnya dari fungsi $f(x) = -x^2 + 4x + 10$

Penyelesaian:

- Syarat stationer $f'(x) = 0$

$$\text{Jadi } f'(x) = -2x + 4$$

$$-2x + 4 = 0 \rightarrow x = 2 \text{ (nilai stationernya)}$$

- Nilai stationernya untuk $x = 2$

$$f(x) = -x^2 + 4x + 10$$

$$\begin{aligned} f(2) &= -(2)^2 + 4(2) + 10 \\ &= 14 \end{aligned}$$

- Jenis stationer dapat ditentukan dengan menyelidiki $f(x)$ disekitar $x = 2$ yaitu $x < 2$ (untuk kiri) dan $x > 2$ (untuk kanan)

$$\# \text{ untuk } x < 2 \text{ berarti } x = 1 \rightarrow f'(x) = -2(1) + 4 = 2$$

Jadi $f'(x) > 0$ sehingga untuk $x < 2$, fungsi $f(x)$ naik

$$\# \text{ untuk } x > 2 \text{ berarti } x = 3 \rightarrow f'(x) = -2(3) + 4 = -2$$

Jadi $f'(x) < 0$ sehingga untuk $x > 2$, fungsi $f(x)$ turun

Sketsa grafiknya adalah

x	$x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	$f(x)$ naik		$f(x)$ turun
sketsa			

Latihan 4.7 :

Tentukan nilai stationer dan jenisnya untuk fungsi $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$ serta sketsa grafiknya !

d. Aplikasi Soal Maksimum dan Minimum

Penerapan nilai max dan min suatu fungsi sangat luas, baik mencakup semua ilmu pendidikan maupun dalam kehidupan sehari-hari. Dalam prakteknya, nilai max dan min di dapat dari nilai stationer, dimana syaratnya adalah $f'(x) = 0$

Contoh 4:

Tentukanlah nilai maksimum dan nilai minimum untuk fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 4$ dalam interval $0 \leq x \leq 3$.

Penyelesaian :

$$f(x) = x^2 - 4x + 4 \quad f'(x) = 2x - 4$$

nilai stasioner $f'(x) = 0$

$$2x - 4 = 0$$

$$2x - 4 + 4 = 0 + 4$$

$$2x = 4$$

$x = 2$ titik-titik kritis yang didapat adalah 0,2,3

untuk $x=0$, maka $f(x) = 4$ (maksimum)

untuk $x=2$, maka $f(x) = 0$

untuk $x=3$, maka $f(x) = -1$ (minimum)

jadi, fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 4$ dalam interval $0 \leq x \leq 3$ mencapai nilai maksimum 4 pada $x=0$ dan nilai minimum -1 pada $x= 3$.

Maka apabila digambarkan pada grafik akan dinyatakan dengan kurva yang berasal dari kiri atas menuju ke kanan bawah.

Contoh 9:

Sebuah benda bergerak dengan persamaan gerak $y = 5t^2 - 4t + 8$ dengan y dalam meter dan t dalam satuan detik. Tentukan kecepatan benda saat $t = 2$ detik!

Penyelesaian

Persamaan kecepatan benda diperoleh dengan menurunkan persamaan posisi benda.

$$y = 5t^2 - 4t + 8$$

$$v = y' = 10t - 4$$

Untuk $t = 2$ detik dengan demikian kecepatan benda adalah $v = 10(2) - 4 = 20 - 4 = 16$ m/detik

Contoh 10

Suatu proyek pembangunan gedung sekolah dapat diselesaikan dalam x hari dengan biaya proyek perhari ($3x - 900 + 120/x$) ratus ribu

rupiah. Agar biaya minimum maka proyek tersebut diselesaikan dalam waktu?

Penyelesaian:

Tentukan dulu fungsi biaya proyek dalam x hari, kalikan biaya pada soal dengan x

$$B(x) = x \left(3x - 900 + \frac{120}{x} \right)$$
$$B(x) = 3x^2 - 900x + 120$$

Biaya minimum tercapai saat turunannya = 0,

$$B'(x) = 6x - 900 = 0$$

$$6x = 900$$

$$x = \frac{900}{6} = 150$$

Jadi, agar biaya minimum maka proyek tersebut diselesaikan dalam waktu 150 hari.

Latihan 4.8:

1. Deketahui jumlah dua bilangan adalah 150. Jika dikalikan salah satu bilangan dengan kuadrat bilangannya yang lain mencapai maksimum. Tentukanlah:
 - a. Bilangan –bilangan tersebut
 - b. Nilai maksimumnya
2. Sebuah roket ditembakkan vertikal ke atas mencapai ketinggian h meter dalam waktu t detik dan tinggi h dirumuskan dengan $h(t) = 400t - 5t^2$. Tentukanlah:
 - a. Waktu yang diperlukan agar roket mencapai tinggi maksimum
 - b. Tinggi maksimum roket
3. Biaya total untuk memproduksi x sak semen tiap hari adalah $\$ \left(\frac{1}{4} x^2 - 35x + 25 \right)$ dan harga jual tiap sak adalah $\$ \left(50 - \frac{1}{4} x \right)$.
 - a. Berapa seharusnya produksi semen setiap hari agar mencapai keuntungan maksimum
 - b. Berapakah keuntungan maksimumnya
4. Sebuah besi beton panjangnya 10 m, dibengkokkan kedua ujungnya sehingga membentuk huruf U, jika panjang yang dibengkokkan kedua ujungnya x m.
 - a. Hitunglah panjang x agar luas penampang maksimum dan
 - b. Tentukan pula luas maksimum penampang
5. Selembar karton berbentuk persegi panjang dengan ukuran $P = 24$ cm dan $L = 9$ cm. Kertas karton tersebut dibuat menjadi kotak tanpa tutup dengan cara memotong bentuk persegi kecil pada keempat bagian sudutnya dengan ukuran sisi x cm, kemudian keempat sisi persegi panjang dilipat sehingga terbentuklah kotak tanpa tutup. Tentukanlah:
 - a. x agar volume kotak maksimum.
 - b. volume maksimum kotak tersebut.

BAB V

INTEGRAL

A. Definisi Integral Tak Tentu

Integral merupakan suatu objek matematika yang dapat diinterpretasikan sebagai luas wilayah ataupun generalisasi suatu wilayah. Proses menemukan integral suatu fungsi disebut sebagai pengintegralan ataupun integrasi. Integral adalah kebalikan dari diferensial. Integral dibagi menjadi dua, yaitu: integral tertentu dan integral tak tentu. Bedanya adalah integral tertentu memiliki batas atas dan batas bawah. Integral tertentu biasanya dipakai untuk mencari volume benda putar dan luas. Notasi matematika yang digunakan untuk menyatakan integral adalah $\int$, seperti huruf S yang memanjang (S singkatan dari “*sum*” yang berarti penjumlahan).

Bentuk umum integral:

$$\text{Jika } f'(x) = x^n, \text{ maka } \int f(x) dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c.$$

Contoh 1:

Carilah anti turunan dari $f(x) = 3x^2$?

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \int 3x^2 dx &= \frac{3}{2+1} x^{2+1} + c \\ &= x^3 + c \end{aligned}$$

Konsep integral dan sifat-sifatnya

$$\diamond \int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx$$

$$\diamond \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Contoh 2:

Hitunglah integral dari $\int (x^2 + 3x) dx$!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 3x) \, dx &= \int x^2 \, dx + \int 3x \, dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 + x^2 + c\end{aligned}$$

Contoh 3:

Hitunglah integral dari $\int (x^4 + 3x)^{30} (4x^3 + 3) \, dx$

Penyelesaian:

$$\text{Mis } u = x^4 + 3x \rightarrow du = 4x^3 + 3$$

$$\begin{aligned}\text{Jadi: } \int u^{30} \, du &= \frac{1}{30+1} u^{30+1} \\ &= \frac{1}{31} u^{31} + c \\ &= \frac{1}{31} (x^4 + 3x)^{31} + c\end{aligned}$$

Contoh 4:

Hitunglah integral dari $\int (x^3 + 6x)^5 (6x^2 + 12) \, dx$

Penyelesaian :

$$\text{Mis } u = x^3 + 6x \rightarrow du = 3x^2 + 6 \rightarrow 2 \cdot du = 6x^2 + 12$$

$$\begin{aligned}\text{Jadi : } \int u^5 2 \cdot du &= 2 \int u^5 \, du \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6} + u^6 + c \\ &= \frac{1}{3} (x^3 + 6x)^6 + c\end{aligned}$$

Latihan 5.1:

Hitunglah integral dari:

- | | | | | | |
|---|---|--|---|--|---|
| 1. $\int 6 \, dx$ | = | 7. $\int \frac{x(x-3x^2)}{\sqrt{x}} \, dx$ | = | 13. $\int \frac{(x^4-5)}{x^7} \, dx$ | = |
| 2. $\int 10x \, dx$ | = | 8. $\int (4x^2 + 5x) \, dx$ | = | 14. $\int (2x + 3)^5 \, dx$ | = |
| 3. $\int 5x^5 \, dx$ | = | 9. $\int x^2 (x^3 + 7) \, dx$ | = | 15. $\int (x^3 + 3)^9 \cdot 3x^2 \, dx$ | = |
| 4. $\int 6\sqrt{x} \, dx$ | = | 10. $\int (6x^2 + 5x + 4) \, dx$ | = | 16. $\int 4x(x^2 - 4)^6 \, dx$ | = |
| 5. $\int \frac{5}{x^3} \, dx$ | = | 11. $\int (2x - 3)^2 \, dx$ | = | 17. $\int (x - 1)(x^2 + 2x - 8)^4 \, dx$ | = |
| 6. $\int \frac{6}{x^4 \sqrt[5]{x}} \, dx$ | = | 12. $\int (2x - 2)(5x - 3) \, dx$ | = | | |

B. Integral Fungsi Trigonometri

Rumus integral tak tentu:

a) Rumus integral tak tentu fungsi trigonometri

1. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
2. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
3. $\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + c$
4. $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cotan x + c$
5. $\int \sec x \cdot \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + c$
6. $\int \operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{ctg} x \, dx = -\operatorname{cosec} x + c$

b) Rumus integral tak tentu fungsi invers

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c = -\cos^{-1} x + c$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{tg}^{-1} x + c = -\cotan^{-1} x + c$
3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} |x| + c = -\operatorname{cosec} |x| + c$

Contoh 5:

Tentukan integral tak tentu $\int (x^2 + \sin x) \, dx =$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}\int (x^2 + \sin x) \, dx &= \int x^2 + \int \sin x \, dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 + (-\cos x) + c \\ &= \frac{1}{3} x^3 - \cos x + c\end{aligned}$$

Contoh 6:

Tentukan $\int (3 \sin t - 2 \cos t) \, dt =$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}\int (3 \sin t - 2 \cos t) \, dt &= \int 3 \sin t \, dt - \int 2 \cos t \, dt \\ &= -3 \cos t - 2 \sin t + c\end{aligned}$$

Contoh 7 :

Tentukan $\int \sec^2 x - \sec x \cdot \operatorname{tg} x \, dx =$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}\int (\sec^2 x - \sec x \cdot \operatorname{tg} x) \, dx &= \int \sec^2 x \, dx - \int \sec x \cdot \operatorname{tg} x \, dx \\ &= \operatorname{tg} x - \sec x + c\end{aligned}$$

Contoh 8:

Tentukan $\int (\sin^5 x^2) (x \cos x^2) dx =$

Penyelesaian :

Mis $u = \sin x^2 \rightarrow du = 2x \cdot \cos x^2 dx \rightarrow \frac{1}{2} du = x \cdot \cos x^2 dx$

$$\begin{aligned}\text{Jadi : } \int (\sin^5 x^2) (x \cos x^2) dx &= \int u^5 \cdot \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \int u^5 du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} u^6 + c \\ &= \frac{1}{12} u^6 + c \\ &= \frac{1}{12} (\sin x^2)^6 + c\end{aligned}$$

c) Hubungan kebalikan

$$\begin{array}{lll}\sin x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x} & \rightarrow \sin^2 x & = \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x} \\ \cos x = \frac{1}{\sec x} & \rightarrow \cos^2 x & = \frac{1}{\sec^2 x} \\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} & \rightarrow \operatorname{tg}^2 x & = \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} \\ \operatorname{Cosec} x = \frac{1}{\sin x} & \rightarrow \operatorname{Cosec}^2 x & = \frac{1}{\sin^2 x} \\ \sec x = \frac{1}{\cos x} & \rightarrow \sec^2 x & = \frac{1}{\cos^2 x} \\ \operatorname{Ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} & \rightarrow \operatorname{Ctg}^2 x & = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\end{array}$$

Contoh 9:

Tentukan integral $\int \frac{1}{\cos^2 3x} dx =$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos^2 3x} dx &= \int \sec^2 3x dx && \rightarrow \quad \text{mis } u = 3x \\ &= \int \sec^2 u \cdot \frac{1}{3} du && \quad du = 3 dx \\ &= \frac{1}{3} \int \sec^2 u du \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{tg} u + c \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + c\end{aligned}$$

Latihan 5.2

Tentukan integral berikut ini !

1. $\int (3x^{1/2} + \cos x) dx =$
2. $\int (\cos x + \operatorname{cosec}^2 x) dx =$
3. $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx =$
4. $\int \cos (3x + 1) \sin (3x + 1) dx =$
5. $\int (3t^2 - 2 \sin t) dt =$
6. $\int \frac{1}{\sin^2 2x} dx =$
7. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} dx =$
8. $\int \frac{3y}{\sqrt{2y^2 + 5}} dy =$
9. $\int (8 \cos x - 6 \sin x) dx =$
10. $\int \sin 5x dx =$
11. $\int (\sin^2 x^2) (x \cos x^2) dx =$
12. $\int \cos (3x + 6) dx =$
13. $\int (\frac{1}{2} y^3 + \cos y) dy =$
14. $\int (\cos 4x)^2 dx =$
15. $\int \frac{dx}{1 + \cos x} =$
16. $\int \sqrt{1 + \sin x} dx =$

C. Penerapan Integral Tentu

a) Bentuk Umum Integral Tentu

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Integral yang ditulis dengan notasi $\int_a^b f(x) dx$ disebut integral tentu karena karena hasilnya berupa nilai tertentu. a disebut batas bawah dan b disebut batas atas integral.

Contoh 10:

Hitunglah:

1. $\int_0^5 (5x) dx =$
2. $\int_2^3 (3x^2 + 2x + 1) dx =$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} 1. \int_0^5 (5x) dx &= \left[\frac{5}{2} x^2 \right]_0^5 \\ &= \left(\frac{5}{2} (5)^2 \right) - \left(\frac{5}{2} (0)^2 \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{125}{2} = 62,5$$

$$\begin{aligned} 2. \int_2^3 (3x^2 + 2x + 1) &= [x^3 + x^2 + x]_2^3 \\ &= ((3)^3 + (3)^2 + (3)) - ((2)^3 + (2)^2 + (2)) \\ &= (27 + 9 + 3) - (8 + 4 + 2) \\ &= 39 - 14 \\ &= 25 \end{aligned}$$

b) Luas Daerah

Integral tentu adalah salah satu konsep dalam kalkulus yang digunakan untuk menghitung luas daerah di bawah kurva fungsi matematis di antara dua titik tertentu pada sumbu-x. Penerapan integral tentu pada luas daerah dapat dijelaskan dengan menggunakan notasi integral sebagai berikut:

Misalkan $f(x)$ adalah fungsi kontinu pada interval $[a,b]$. Luas daerah di bawah kurva $f(x)$ di antara $x = a$ dan $x = b$ dapat dihitung dengan menggunakan integral tentu dari a hingga b :

$$L = \int_a^b f(x) \, dx \quad \text{dengan } I = [a, b]$$

Sebelum mempelajari penerapan integral tak tentu pada luas daerah lebih dalam yang nanti akan di lanjutkan dengan luas bidang datar, kita perlu mengetahui dan memahami prinsip induksi matematika, karena berkaitan dengan penerapan tersebut.

Prinsip induksi matematika

Σ (sigma) = jumlah

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$\sum_{i=1}^n ai = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$\sum_{i=1}^n 1 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

Sifat – sifat kelinieran

Misalkan $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ adalah sebuah barisan dan c konstanta, maka berlaku sifat =

$$1. \quad \sum_{i=1}^n c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^n a_i$$

$$2. \quad \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

Definisi:

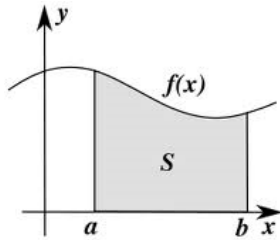
Misal P_n suatu barisan, pernyataan yang memenuhi 2 kondisi ini

1. P_1 adalah benar
2. Kebenaran P_i membawa kebenaran $P_i + 1$, maka P_n adalah benar untuk setiap bilangan bulat positif

Rumus-rumus hasil dari pembuktian:

1.	$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2.	$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3.	$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$
4.	$\sum_{i=1}^n i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4$ $= \frac{n(n+1)(6n^2 + 9n + 1)}{30}$

c) Luas Bidang Datar



$$\text{Luas } S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i, \quad \text{dimana} \quad \Delta x_i = \frac{x_n - x_0}{n}$$

$$x_i = x_0 + \Delta x_i \cdot i$$

Definisi:

Integral Tentu). Andaikan f suatu fungsi yang didefinisikan pada selang tutup $[a, b]$. Jika

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i$$

ada, kita katakan f adalah terintegralkan pada $[a, b]$. lebih lanjut $\int_a^b f(x) dx$, disebut integral tentu (atau integral Riemann) f dari a ke b , diberikan oleh

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i$$

Contoh 11:

Hitung luas daerah S yang dibatasi oleh $f(x) = 4x - x^2$, garis $x_0 = 1$, $x_n = 4$ dan sumbu x !

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= \frac{x_n - x_0}{n} & x_i &= x_0 + \Delta x_i \cdot i \\ &= \frac{4-1}{n} & &= 1 + \frac{3}{n} \cdot i \\ &= \frac{3}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[4 \left(1 + \frac{3}{n} i \right) - \left(1 + \frac{3}{n} i \right)^2 \right] \frac{3}{n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[4 + \frac{12i}{n} - 1 - \frac{6i}{n} \cdot \frac{9}{n^2} i^2 \right] \frac{3}{n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[3 + \frac{6i}{n} - \frac{9i^2}{n^2} \right] \frac{3}{n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[\frac{9}{n} + \frac{18i}{n^2} - \frac{27i^2}{n^3} \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{9}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{18i}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{27i^2}{n^3} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{18}{n^2} \sum_{i=1}^n i - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n} \cdot n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{18}{n^2} \left(\frac{1}{2} n (n+1) \right) \\
&\quad - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{27}{n^3} \left(\frac{1}{6} n (n+1)(2n+1) \right) \\
&= 9 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n} (n+1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n^2} \left(\frac{1}{2} (n+1)(2n+1) \right) \\
&= 9 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n} (n+1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{2n^2} (2n^2 + 3n + 1) \\
&= 9 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(9 + \frac{9}{n} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(9 + \frac{27}{2n} + \frac{9}{2n^2} \right) \\
&= 9 + 9 + 0 - (9 + 0 + 0) \\
&= 9 \text{ satuan luas}
\end{aligned}$$

Cara singkat menentukan luas daerah S adalah :

$$\begin{aligned}
&= \int_1^4 4x - x^2 \, dx \\
&= \left(2x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_1^4 \\
&= 2(4-1)^2 - \frac{1}{3} (4-1)^3 \\
&= 2 \cdot 3^2 - \frac{1}{3} \cdot 3^3 \\
&= 18 - 9 \\
&= 9 \text{ satuan luas}
\end{aligned}$$

d) Volume Benda

Dalam kehidupan sehari-hari banyak kita temukan benda-benda putar seperti: kaleng, gelas, botol, ember, lampu dan sebagainya. Kadangkala timbul pertanyaan, dapatkah kita menghitung benda-benda tersebut? Dapat, tetapi tidak semudah yang kita bayangkan. Dengan metode integral, kita dapat menjawab pertanyaan tersebut. Menentukan volume secara integral dapat menggunakan konsep berikut:

Jika benda diputar terhadap sumbu x maka:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Jika benda diputar terhadap sumbu y maka:

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy$$

Contoh 12:

Hitunglah volume benda yang terjadi jika daerah dibatasi kurva $y = 3x + 2$, sumbu x , garis $x = 1$, dan $x = 3$ diputar mengelilingi sumbu x sebesar 360° !

Penyelesaian:

Gambarlah daerah yang dibatasi kurva untuk memudahkan proses pengintegralan.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^3 y^2 dx \\ &= \pi \int_1^3 (3x + 2)^2 dx \\ &= \pi \int_1^3 (9x^2 + 12x + 4) dx \\ &= \pi [3x^3 + 6x^2 + 4x]_1^3 \\ &= \pi [(192 + 96 + 16) - (3 + 6 + 4)] \\ &= \pi [(304) - (13)] \\ &= 291 \pi \end{aligned}$$

Latihan 5.3:

1. Hitung luas daerah S dengan menggunakan proses limit jumlah Riemann yang di batasi oleh garis $y = 2x$, garis $x = 3$ dan sumbu x !
2. Hitung luas daerah S dengan menggunakan proses limit jumlah Riemann yang di batasi oleh garis $y = 3x$, garis $x = 4$ dan sumbu x !
3. Hitung luas daerah pada selang $[-2, 3]$ dengan $f(x) = x+3$ dx !
4. Hitunglah isi benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = x^3$, sumbu x , garis $x = 0$ dan $x = 2$ diputar mengelilingi sumbu x sebesar 360° !
5. Hitunglah isi benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = x^2 - 1$, sumbu y , garis $y = 2$ dan $y = 6$ diputar mengelilingi sumbu y sebesar 360° !

D. Teorema Dasar Kalkulus

Teorema Dasar Kalkulus adalah dua hasil utama dalam kalkulus yang menghubungkan konsep integral dan turunan. Teorema ini terdiri dari dua bagian: Teorema Dasar Kalkulus Pertama dan Teorema Dasar Kalkulus Kedua.

Teorema dasar kalkulus pertama (1)

Definisi :

Misalkan fungsi f terintegralkan pada interval $[a,b]$, nilai rata-rata dari fungsi f pada $[a,b]$ didefinisikan sebagai berikut:

$$NR = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Teorema 1(teorema nilai rata-rata untuk integral)

Jika fungsi f kontinu pada $[a,b]$ maka $\exists c \in [a,b]$, maka $\int_a^b f(x) dx = f(c) (b - a)$

Contoh 13:

Tentukan nilai rata-rata (NR) fungsi $f(x) = 2x + 1$ pada interval $[1,4]$!

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \text{NR} &= \frac{1}{4-1} \int_1^4 (2x + 1) dx \\ &= \frac{1}{3} (x^2 + x) \Big|_1^4 \\ &= \frac{1}{3} [(4^2 + 4) - (1^2 + 1)] \\ &= \frac{1}{3} (20 - 2) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Contoh 14:

Diketahui $f(x) = x^2$

Ditanya = Tentukan nilai c sebagai $\int_1^3 f(x) dx = f(c) (3 - 1)$ dan

Tentukan NR ...?

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{a. } \int_1^3 x^2 dx &= c^2 (3 - 1) \\ \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^3 &= 2c^2 \\ \frac{1}{3} (3^3 + 1^3) &= 2c^2 \\ \frac{1}{3} (26) &= 2c^2 \\ \frac{26}{3} &= 2c^2 \\ 6c^2 &= 26 \\ C^2 &= \frac{26}{6} \\ C &= \sqrt{\frac{13}{3}} \quad \text{di } x \ 3 \\ C &= \pm \frac{1}{3} \sqrt{39} = \frac{6,24}{3} = 2,08 \end{aligned}$$

Jadi nilai $c = 2,08$

$$\begin{aligned} \text{b. NR} &= \frac{1}{2} \int_1^3 x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_1^4 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} 3^3 - \frac{1}{3} 1^3 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{26}{3} \right) = \frac{26}{6} = 4,33 \end{aligned}$$

Teorema 2

Jika fungsi f kontinu pada $[a, b]$ maka fungsi $F(x) = \int_0^x f(t) dt$; x

Contoh 15:

Tentukan fungsi turunan pertama dari $F(x) = \int_0^x (\sqrt{1 + \cos t}) dt$!

Penyelesaian :

$$F(x) = \int_0^x (\sqrt{1 + \cos t}) dt$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \sqrt{1 + \cos t} dt$$
$$= \sqrt{1 + \cos x}$$

Note :

1. $F(x) = \int (2x + 1) dx$
 $= x^2 + x + c$

$$F'(x) = 2x + 1$$

2. $F(x) = \int_3^x (2t) dt$

$$F(x) = t^2 \Big|_3^x$$

$$F(x) = x^2 - 9$$

$$F'(x) = 2x$$

Teorema dasar kalkulus kedua (2)

Teorema dasar kalkulus

Jika fungsi f kontinu (karena diintegrasikan) pada selang $[a, b]$ dan fungsi F adalah suatu anti turunan dari f pada selang $[a, b]$, maka:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Contoh 16:

Hitunglah $\int_1^3 (2x + 3) dx =$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}\int_1^3 (2x + 3) dx &= F(b) - F(a) \\ (x^2 + 3x) \Big|_1^3 &= F(3) - F(1) \\ &= (3^2 + 3 \cdot 3) - (3^1 + 3 \cdot 1) \\ &= 18 - 4 \\ &= 14\end{aligned}$$

Teorema (sifat penambahan selang)

Jika f terintegralkan pada suatu selang yang mengandung tiga titik a , b dan c , maka

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Dengan $a < b < c$

Contoh 17:

Hitunglah $\int_1^3 2x dx =$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\int_1^3 2x dx &= \int_1^2 2x dx + \int_2^3 2x dx \\ x^2 \Big|_1^3 &= x^2 \Big|_1^2 + x^2 \Big|_2^3 \\ 3^2 - 3^1 &= (2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) \\ 8 &= 3 + 5 \\ 8 &= 8\end{aligned}$$

Latihan 5.4:

1. Carilah nilai rata-rata (NR) dari fungsi dan pada selang yang diberikan sebagai berikut !
 - a. $f(x) = 2x^2 + 2x + 1$; $[1, 3]$
 - b. $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 + x - 4)$; $[-1, 2]$
2. Tentukan nilai c dan NR dari fungsi pada selang yang diberikan sebagai berikut!
 - a. $f(x) = 2x^3$; $[4, 2]$
 - b. $f(x) = 4x^3$; $[1, 3]$
3. Hitunglah integral tentu dibawah ini dengan menggunakan teorema dasar kalkulus 2!
 - a. $\int_2^3 3x^2 + 5 \, dx =$
 - b. $\int_1^2 4x^2 \, dx =$
 - c. $\int_3^4 5x^3 + 2x \, dx =$
4. Hitunglah integral tentu dibawah ini dengan menggunakan teorema penambahan selang!
 - a. $\int_1^3 3x^2 \, dx =$
 - b. $\int_2^4 (3x^3 + 3x^2) \, dx =$
 - c. $\int_3^5 (4x^2 + 5x - 3) \, dx =$

E. Aturan Leibniz

Misalkan f kontinu pada interval terbuka I yang memuat $g(x)$ dan $h(x)$ dengan g dan h terdefersial.

Terdefinisi pada I jika:

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt, x \in I$$

Maka f terdefinisi pada I dan:

$$F'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Contoh 18:

Tentukan turunan pertama dari $\frac{d}{dx} \left(\int_1^{x^2} \sqrt{1+t^3} dt \right)$, $t > -1$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x^2) \cdot \frac{d}{dx}(x^2) - f(1) \cdot \frac{d}{dx}(1) \\ &= \sqrt{1+(x^2)^3} \cdot 2x - \sqrt{1+1^3} \cdot 0 \\ &= 2x \sqrt{1+x^3} \end{aligned}$$

Contoh 19:

Tentukan turunan pertama dari $\frac{d}{dx} \left(\int_0^{\sqrt[3]{x}} \sin(t^3) dt \right)$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(\sqrt[3]{x}) \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x}) - 0 \\ &= \sin(\sqrt[3]{x})^3 \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{2}{3}} \\ &= \sin x \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \cdot \sin x \end{aligned}$$

Contoh 20:

Jika $\int_0^x f(t) dt = x^3 (x + 2)$ dengan fungsi kontinu pada interval $[0, \infty)$, Tentukan nilai $f(4)$ dan $f'(4)$!

Penyelesaian:

Langkah 1: $\frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = \frac{d}{dx} (x^3 (x + 2))$

$$f(x) \cdot 1 = \frac{d}{dx} (x^4 + 2x^3)$$

$$f(x) = 4x^3 + 2x^3$$

Langkah 2: Untuk menghitung $f(4)$, gantikan $x = 4$ pada bentuk $f(x) = 4x^3 + 2x^3$, sehingga diperoleh :

$$f(4) = 4(4)^3 + 2(4)^3$$

$$f(4) = 384$$

Langkah 3: Untuk menghitung $f'(4)$, tentukan turunan kedua ruas bentuk $f(x) = 4x^3 + 2x^3$ terhadap x , kemudian gantikan $x = 4$, sehingga diperoleh :

$$f(x) = 4x^3 + 2x^3$$

$$f'(x) = 12x^2 + 6x^2$$

$$f'(4) = 12(4)^2 + 6(4)^2$$

$$= 192 + 48$$

$$= 240$$

Latihan 5.5:

1. Tentukan fungsi turunan pertama dari
 - a. $\frac{d}{dx} \left(\int_{x^3}^{x^2} \sqrt{1+t^3} dt \right), t > -1$
 - b. $\frac{d}{dx} \left(\int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1+t^4} dt \right), t > -1$
 - c. $\frac{d}{dx} \left(\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{2+\cos 3t}} dt \right), t > -1$
 - d. $\frac{d}{dx} \left(\int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1+\frac{1}{t}} dt \right), t > -1$
2. Jika $\int_0^x f(t) dt = (x^2 + 5) 2x^2$, dengan fungsi kontinu pada interval $[0, \infty)$, Tentukan nilai $f(3)$ dan $f'(3)$!
3. Jika $\int_0^x f(t) dt = x^2 (1 + x)$, dengan fungsi kontinu pada interval $[0, \infty)$, Tentukan nilai $f(2)$, $f'(2)$ dan $f''(2)$!

F. Fungsi Transenden

Fungsi transenden adalah jenis fungsi matematika yang tidak dapat diwakili oleh polinom atau fungsi trigonometri sederhana. Fungsi-fungsi ini sering kali muncul sebagai solusi dari persamaan diferensial, dan karakteristik utama mereka adalah ketidakmampuan untuk diungkapkan dengan cara yang sederhana menggunakan operasi aljabar atau fungsi elemen.

a) Fungsi logaritma: Turunan $\ln$ dan sifat $\ln$

Definisi:

Fungsi logaritma natural ($\ln$) ditulis $f(x) = \ln x$ didefinisikan sebagai berikut :

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, x > 0 \quad [0, +\infty)$$

Turunan logaritma natural ($\ln$):

1. $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}, x > 0$
2. $\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \cdot u', u(x) > 0, u' \text{ ada}$
3. $\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x}, x \neq 0$
4. $\frac{d}{dx} \ln |u| = \frac{1}{u} \cdot u', u(x) \neq 0, u' \text{ ada}$

Pada tiap bentuk turunan itu ada rumus pengintegralan. Menurut turunan $\ln$ di atas kita peroleh:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c; x \neq 0$$

kalau variable x diganti dengan variable u menjadi

$$\int \frac{1}{u} dx = \ln |u| + c; u \neq 0$$

Contoh 21:

Tentukan turunan pertama dari

a. $f(x) = \ln 2x$

b. $f(x) = \ln (4x + 5)$

Penyelesaian:

a. Misal $u = 2x \rightarrow u' = 2$,

$$\begin{aligned}\text{Jadi, } \frac{d}{dx} \ln 2x &= \frac{1}{2x} \cdot 2 \\ &= \frac{1}{x}, x \neq 0\end{aligned}$$

b. Misal $u = 4x + 5 \rightarrow u' = 4$,

$$\begin{aligned}\text{Jadi, } \frac{d}{dx} \ln (4x+5) &= \frac{1}{4x+5} \cdot 4 \\ &= \frac{4}{4x+5}, x \neq -\frac{5}{4}\end{aligned}$$

Teorema sifat logaritma natural (ln)

1. $\ln 1 = 0$

2. $\ln (a \cdot b) = \ln a + \ln b$

3. $\ln \left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

4. $\ln a^r = r \cdot \ln a$

Contoh 22 :

Hitunglah $\frac{d}{dx} \ln \left(\frac{1-x}{1+x}\right) =$

Penyelesaian :

Cara 1

Mis 1: $u = \frac{1-x}{1+x} \rightarrow$ $\begin{aligned}\text{mis } u &= 1-x \rightarrow u' = -1 \\ v &= 1+x \rightarrow v' = 1\end{aligned}$

$$\begin{aligned}u' &= \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \\ &= \frac{(-1)(1+x) - (1-x)(1)}{(1+x)^2} \\ &= \frac{(-1-x) - (1-x)}{(1+x)^2} \\ &= \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} \\ &= \frac{-2}{(1+x)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Jadi: } \frac{d}{dx} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) &= \frac{1}{u} \cdot u' \\
 &= \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} \\
 &= \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} \\
 &= \frac{-2}{(1-x)(1+x)} \\
 &= \frac{-2}{1-x^2}
 \end{aligned}$$

Cara ke-2

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) &= \frac{d}{dx} (\ln(1-x) - \ln(1+x)) \\
 &= \frac{1}{(1-x)} \cdot (-1) - \frac{1}{(1+x)} \cdot (1) \\
 &= \frac{-1-x-1+x}{(1-x)(1+x)} \\
 &= \frac{-2}{1-x^2}
 \end{aligned}$$

Contoh 23:

Tentukan $\frac{d}{dx} \ln (\tan x) =$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \ln (\tan x) &= \frac{d}{dx} \ln \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) \\
 &= \frac{d}{dx} \ln (\ln \sin x - \ln \cos x) \rightarrow \\
 &= \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x - \frac{1}{\cos x} \cdot -\sin x \\
 &= \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} \\
 &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cdot \cos x} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \sin 2x} = \frac{2}{\sin 2x}
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{u} \cdot u' - \frac{1}{v} \cdot v'$$

Contoh 24:

Tentukan $\frac{d}{dx} \ln (x+2)^2 =$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \ln (x+2)^2 &= 2 \cdot \ln (x+2) \rightarrow \text{mis } u = x+2 ; u' = 1 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{x+2} \cdot 1 \\ &= \frac{2}{x+2}\end{aligned}$$

Contoh 25:

Tentukan $\frac{d}{dx} (x \cdot \ln x) =$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} (x \cdot \ln x) &= u' \cdot v + u \cdot v' \rightarrow \\ &= 1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x \\ &= \ln x + 1\end{aligned}$$

mis $u = x \rightarrow u' = 1$

$v = \ln x \rightarrow v' = \frac{1}{x}$

Contoh 26:

Tentukan $\frac{d}{dx} \ln (\int 3x^2 + 1) =$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \ln (\int 3x^2 + 1) &= \frac{d}{dx} \ln (x^3 + x) \rightarrow \int 3x^2 + 1 = x^3 + x \\ &= \frac{1}{(x^3 + x)} \cdot 3x^2 + 1 \rightarrow \\ &= \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x}\end{aligned}$$

mis $u = x^3 + x ; u' =$

$= 3x^2 + 1$

Contoh 27:

Tentukan $\int \frac{3}{2x+4} dx =$

Penyelesaian:

Misalkan $u = 2x + 4$, maka $du = 2dx$, jika kedua ruas di kali $\frac{3}{2}$ menjadi $\frac{3}{2} du = 3dx$.

$$\begin{aligned}\text{Sehingga } \int \frac{3}{2x+4} dx &= \int \frac{1}{2x+4} \cdot 3dx \\ &= \int \frac{1}{2x+4} \cdot \frac{3}{2} du \\ &82\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2} \int \frac{1}{2x+4} \cdot 2dx \\
&= \frac{3}{2} \int \frac{1}{u} du \\
&= \frac{3}{2} \ln |u| + c \\
&= \frac{3}{2} \ln |2x + 4| + c
\end{aligned}$$

Contoh 28:

Tentukan $\int_{-1}^3 \frac{x}{10-x^2} dx =$

Penyelesaian:

Misalkan $u = 10 - x^2$, maka $du = -2dx$, jika kedua ruas dikali $-\frac{1}{2}$ menjadi $-\frac{1}{2} du = x dx$.

$$\begin{aligned}
\text{Sehingga } \int_{-1}^3 \frac{x}{10-x^2} dx &= \int_{-1}^3 \frac{1}{10-x^2} x dx \\
&= \int_{-1}^3 \frac{1}{10-x^2} \cdot -\frac{1}{2} du \\
&= -\frac{1}{2} \int_{-1}^3 \frac{1}{10-x^2} \cdot -2dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_{-1}^3 \frac{1}{u} du \\
&= -\frac{1}{2} \ln |u| + c \\
&= -\frac{1}{2} \ln |10 - x^2| + c \\
&= \left[-\frac{1}{2} \ln |10 - x^2| \right]_{-1}^3 \\
&= -\frac{1}{2} \ln 1 + \frac{1}{2} \ln 9 = \frac{1}{2} \ln 9
\end{aligned}$$

Latihan 5.6:

Hitunglah turunan berikut (lihat contoh no. 21)

1. $\frac{d}{dx} \ln (x + \sin x)$
2. $\frac{d}{dx} \ln (\sin (5x + 6))$
3. $\frac{d}{dx} (\ln. \ln (x + 2))$
4. $\frac{d}{dx} \ln (x + \cos x)$
5. $\frac{d}{dx} \ln (\sin (3x^2+4x-6))$
6. $\frac{d}{dx} \ln (\cos 2x)$

Hitunglah turunan berikut (lihat contoh no. 22)

7. $\frac{d}{dx} \ln \left(\frac{1-2x}{1+2x} \right) =$
8. $\frac{d}{dx} \ln \left(\frac{2x}{1+x} \right) =$
9. $\frac{d}{dx} \ln \left(\frac{2x^2}{3x} \right) =$

Hitunglah turunan berikut (lihat contoh no. 23 dan sifat ln no. 2)

10. $\frac{d}{dx} \ln (\operatorname{ctg} x) =$
11. $\frac{d}{dx} (\ln (x \cdot \sin x)) =$

Hitunglah turunan berikut (lihat contoh no. 24)

12. $\frac{d}{dx} \ln \left(\frac{1}{(2x+3)^2} \right) =$
13. $\frac{d}{dx} \ln (\sin^2 x) =$
14. $\frac{d}{dx} \ln (\cos^2 x) =$
15. $\frac{d}{dx} \ln (2x + 3)^2 =$

Hitunglah turunan berikut (lihat contoh no. 25)

$$16. \frac{d}{dx} (x^2 \cdot \ln \sqrt{x}) =$$

$$17. \frac{d}{dx} (\ln x \cdot 3x^2) =$$

$$18. \frac{d}{dx} (3x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln \sqrt[3]{x}) =$$

Hitunglah integral berikut (lihat contoh no. 26)

$$19. \frac{d}{dx} \ln (\int 5x^2 - 2x + 8) =$$

$$20. \frac{d}{dx} \ln (\int 6x + 2) =$$

$$21. \frac{d}{dx} \ln (\int 7x) =$$

Tentukan integral berikut (lihat contoh no. 27 dan no. 28)

$$22. \int \frac{6}{3x+4} dx =$$

$$23. \int \frac{4}{8x+4} dx =$$

$$24. \int_{-4}^3 \frac{x}{17-x^2} dx =$$

$$25. \int_0^2 \frac{x+1}{2x^2+4x+1} dx =$$

b) Fungsi Eksponen: sifat eksponen dan turunan eksponen

Fungsi eksponen adalah fungsi matematika yang dinyatakan dalam bentuk $f(x) = a^x$, di mana a disebut sebagai pangkat atau basis eksponen, dan x adalah eksponen. Sifat-sifat utama dan turunan fungsi eksponen adalah sebagai berikut:

Teorema 9.1.3

Fungsi $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ adalah invers dari fungsi $g(x) = \ln x$, $x > 0$,

akibatnya $y = e^x$, $x \in \mathbb{R} \leftrightarrow x = \ln y$, $y > 0$.

$$\begin{aligned}
 y &= e^x \\
 \ln y &= \ln e^x \\
 \ln y &= x \cdot \ln e^x \rightarrow (\ln e = 1) \\
 \ln y &= x
 \end{aligned}$$

Teorema 9.1.4

1. $e^0 = 1$
2. $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$
3. $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
4. $(e^a)^b = e^{a \cdot b}$

Contoh 29:

Sederhanakanlah $\left(\frac{e^5 e^3}{e^2}\right)^6 =$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{e^5 e^3}{e^2}\right)^6 &= (e^{5+3-2})^6 \\
 &= (e^6)^6 \\
 &= e^{36}
 \end{aligned}$$

Teorema 9.1.5 (turunan eksponen)

1. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x, x \in \mathbb{R}$
2. $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot u', u'(x) \text{ ada}$

Contoh 30:

Tentukan $\frac{d}{dx}(e^{2x+5}) =$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(e^{2x+5}) &= e^u \cdot u' \rightarrow \\
 &= e^{2x+5} \cdot 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Mis } u &= 2x + 5 \\
 u' &= 2
 \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot e^{2x+5}$$

Contoh 31:

Tentukan $\frac{d}{dx} (e^{(x+2)^2}) =$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (e^{(x+2)^2}) &= e^u \cdot u' \quad \rightarrow \\ &= e^{(x+2)^2} \cdot 2x + 4 \\ &= 2x + 4 \cdot e^{(x+2)^2} \end{aligned}$$

Mis $u = (x + 2)^2$

$u' = 2x + 4$

Contoh 32:

Tentukan $\frac{d}{dx} (e^{\frac{1-x}{1+x}}) =$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (e^{\frac{1-x}{1+x}}) &= e^u \cdot u' \quad \rightarrow \\ &= e^{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-2x}{(1+x)^2} \\ &= \frac{-2x}{(1+x)^2} \cdot e^{\frac{1-x}{1+x}} \end{aligned}$$

Mis $u = \frac{1-x}{1+x}, \quad \rightarrow$

$u' = \frac{u' \cdot v + u \cdot v'}{v^2}$

$= \frac{-1(1+x) + (1-x)1}{(1+x)^2}$

$= \frac{-2x}{(1+x)^2}$

mis $u = 1-x \rightarrow u' = -1$

$v = 1+x \rightarrow v' = 1$

Contoh 33:

Tentukan $\frac{d}{dx} (x \cdot e^{x+5}) =$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x \cdot e^{x+5}) &= u' \cdot v + u \cdot v' \quad \rightarrow \\ &= 1 \cdot e^{x+5} + e^{x+5} \cdot x \\ &= e^{x+5} \cdot (1 + x) \end{aligned}$$

Mis $u = x \rightarrow u' = 1$

$v = e^{x+5} \rightarrow v' = e^{x+5} \cdot 1$

Teorema 9.1.6

1. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a, a > 0$
2. $\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \cdot u', a > 0, u'(x)$ ada
3. $\frac{d}{dx}({}^a\log x) = \frac{{}^a\log e}{x}, a > 0$
4. $\frac{d}{dx}({}^a\log u) = {}^a\log e \cdot \frac{u'}{u}$

Contoh 34:

Tentukan $\frac{d}{dx}(6^x) =$

Penyelesaian:

$$\frac{d}{dx}(6^x) = 6^x \ln 6$$

Contoh 35:

Tentukan $\frac{d}{dx}(4^{3x}) =$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(4^{3x}) &= 4^{3x} \ln 4 \cdot 3 \\ &= 3 \cdot 4^{3x} \ln 4\end{aligned}$$

→

Mis	$u = 3x$
	$u' = 3$

Contoh 36:

Tentukan $\frac{d}{dx}({}^a\log x^2) =$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}({}^a\log x^2) &= {}^a\log e \cdot \frac{2x}{x^2} \\ &= \frac{2}{x} {}^a\log e\end{aligned}$$

→

Mis	$u = x^2$
	$u' = 2x$

Contoh 37:

Tentukan $\frac{d}{dx}(x^x) =$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(x^x) &\Rightarrow y = x^x \\
 \ln y &= \ln x^x \\
 \ln y &= u' \cdot v + u \cdot v' \\
 \frac{y'}{y} &= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \\
 \frac{y'}{y} &= \ln x + 1 \\
 y' &= y(\ln x + 1) \\
 y' &= x^x(\ln x + 1)
 \end{aligned}$$

Mis $u = x \rightarrow u' = 1$ $\rightarrow v = \ln x \rightarrow v' = \frac{1}{x}$
--

Teorema 9.1.7

1. $\int \frac{du}{u}$	$= \ln u + c$
2. $\int e^u du$	$= e^u + c$
3. $\int a^u du$	$= \frac{a^u}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1$

Contoh 38:

Tentukan $\int \frac{dx}{2x+1} =$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{2x+1} &= \int \frac{\frac{1}{2} du}{u} \rightarrow \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} \\
 &= \frac{1}{2} \ln |u| + c \\
 &= \frac{1}{2} \ln |2x + 1| + c
 \end{aligned}$$

Mis $u = 2x+1$ $du = 2 dx$ $dx = \frac{1}{2} du$
--

Contoh 39:

Tentukan $\int e^{2x} dx =$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 \int e^{2x} dx &= \int e^u \frac{1}{2} du \rightarrow \\
 &= \frac{1}{2} \int e^u du
 \end{aligned}$$

Mis $u = 2x$ $du = 2 dx$ $dx = \frac{1}{2} du$
--

$$= \frac{1}{2} \cdot e^u + c$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + c$$

Contoh 40:

Tentukan $\int 5^{3x} dx =$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \int 5^{3x} dx &= \int 5^u \frac{1}{3} du \rightarrow \\ &= \frac{1}{3} \int 5^u du \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{5^{3x}}{\ln 5} + c \end{aligned}$$

Mis $u = 3x$ dx

$$du = 3 dx$$

$$dx = \frac{1}{3} du$$

Latihan 5.7 :

Tentukan turunan eksponen berikut (lihat contoh 1- 5) :

1. $\frac{d}{dx} e^{\ln x} =$
2. $\frac{d}{dx} (e^{\cos x}) =$
3. $\frac{d}{dx} e^{\frac{2x}{1+x}} =$
4. $\frac{d}{dx} \ln (x \cdot e^x) =$

Tentukan turunan eks berikut (lihat contoh 6-9):

5. $\frac{d}{dx} (2^{\sin x}) =$
6. $\frac{d}{dx} (4^{\ln x}) =$
7. $\frac{d}{dx} ({}^3\log(2x + 3)) =$
8. $\frac{d}{dx} (2^{(e^x + \ln x)}) =$
9. $\frac{d}{dx} (x^{\ln x}) =$

Hitunglah integral berikut (lihat contoh 10 - 12):

10. $\int \frac{1}{3x+4} dx =$
11. $\int \frac{dx}{2x^2+1} =$
12. $\int \frac{(2x+1)}{(x^2+x-5)} dx =$

$$13. \int x \cdot e^{x^2} dx =$$

$$14. \int \frac{e^{\ln x}}{x} dx =$$

$$15. \int 4^{\frac{1}{2}x+1} dx =$$

$$16. \int (e^x - 1)^2 \cdot e^x dx =$$

c) Integral Parsial

Pengintegralan parsial dapat digunakan jika pengintegralan dengan substitusi tidak berhasil. Rumus pengintegralan parsial integral tak tentu sebagai berikut:

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$

Bukti:

Jika $y = u \cdot v$, maka turunannya terhadap x dapat ditulis

$$y = u \cdot v$$

$$\frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx}, \text{ Kemudian kalikan kedua ruas dengan } dx,$$

menjadi

$$dy = v \cdot du + u \cdot dv$$

$$u \cdot dv = dy - v \cdot du, \text{ Jika kedua ruas diintegralkan, menjadi:}$$

$$\int u \, dv = \int dy - \int v \, du$$

$$\int u \, dv = y - \int v \, du, \text{ Karena } y = u \cdot v, \text{ maka diperoleh rumus integral parsial:}$$

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$

Contoh 41:

Tentukan integral $\int x \cos x \, dx =$

Penyelesaian:

$$\text{Mis } u = x \quad dv = \cos x \, dx$$

$$du = dx \quad v = \sin x$$

rumus pengintegralan menjadi:

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, dx &= x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= x \sin x - (-\cos x) + c \\ &= x \sin x + \cos x + c \end{aligned}$$

Menggunakan aturan Tanzalin

Fungsi pertama diturunkan		Fungsi kedua diintegralkan
x	+	$\cos x$
1	-	$+\sin x$
0		$-\cos x$

$$\text{Jadi } \int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + c$$

Contoh 42:

Tentukan integral $\int x \ln x \, dx =$

Penyelesaian:

$$\text{Mis } u = \ln x$$

$$dv = x \, dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$v = \frac{1}{2} x^2$$

$$= \frac{dx}{x}$$

Rumus pengintegralan menjadi:

$$\int x \ln x \, dx = \ln x \cdot \frac{1}{2} x^2 - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= \ln x \cdot \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^2 + c$$

$$= \ln x \cdot \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^2 + c$$

Latihan 5.8:

Tentukan integral integral berikut dengan menggunakan integral parsial:

1. $\int x \sin x \, dx$ =

2. $\int e^x \sin x \, dx$ =

3. $\int 2x \ln x \, dx$ =

4. $\int e^x x \cos x \, dx$ =

5. $\int \ln^2(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$ =

6. $\int x^3 \cos x \, dx$ =

7. $\int x \sin(3x + 1) \, dx$ =

BAB VI

PEMECAHAN MASALAH DAN APLIKASI

A. Penggunaan Kalkulus dalam Konteks Geologi

Penggunaan kalkulus dalam konteks geologi melibatkan penerapan konsep-konsep matematika kalkulus untuk memahami dan memodelkan fenomena geologis yang kompleks. Beberapa area di mana kalkulus digunakan dalam geologi melibatkan pemahaman perubahan, pertumbuhan, dan interaksi dalam sistem geologi.

Contoh 1:

Sebuah sungai mengalir melintasi suatu lereng gunung dengan kemiringan tertentu. Laju erosi E (dalam meter per tahun) pada suatu titik pada lereng tersebut dapat dimodelkan oleh fungsi $E(x) = 0.2x^2 - 2x + 5$, di mana x adalah jarak horizontal dari titik awal di sepanjang sungai.

Selesaikan persoalan berikut:

- a. Tentukan laju erosi pada jarak $x = 10$ meter.
- b. Pada jarak berapa laju erosi mencapai nilai minimum?

Penyelesaian:

- a. Menentukan laju Erosi pada $x = 10$

Untuk menemukan laju erosi pada jarak $x = 10$, kita perlu menghitung turunan pertama dari fungsi $E(x)$ dan mengevaluasinya pada $x = 10$.

$$E'(x) = \frac{d}{dx} (0.2x^2 - 2x + 5)$$

$$E'(x) = 0.4x - 2$$

Selanjutnya, evaluasi pada $x = 10$

$$\begin{aligned} E'(10) &= (0.4 \times 10) - 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Jadi, laju erosi pada $x = 10$ meter adalah 2 meter pertahun

b. Menentukan jarak minimum laju Erosi

Untuk menentukan di mana laju erosi mencapai nilai minimum, kita perlu mencari nilai kritis fungsi $E(x)$. Nilai - nilai ini ditemukan saat $E'(x) = 0$.

$$0,4x - 2 = 0$$

$$0,4x = 2$$

$$x = 5$$

jadi, laju erosi mencapai nilai minimum pada jarak $x = 5$ meter.

Selain contoh di atas , berikut adalah beberapa contoh penggunaan kalkulus dalam geologi:

1. Model Pemetaan dan Topografi

Kalkulus digunakan untuk membuat model matematis yang menggambarkan perubahan topografi dan pemetaan geologis. Ini melibatkan konsep integral untuk menghitung volume dan luas area, yang penting dalam pemodelan lereng gunung, struktur geologi, dan pengukuran topografi.

Contoh 2:

Pertimbangkan fungsi ketinggian $h(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2$ yang menggambarkan permukaan topografi suatu daerah. Hitung aproksimasi pertambahan ketinggian (dh) pada suatu titik $(2, -1)$ ketika $dx = 0.1$ dan $dy = -0.05$.

Penyelesaian:

Fungsi ketinggian $h(x,y)$ dapat dijabarkan menjadi:

$$h(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2$$

Dengan menggunakan diferensial biasa, pertambahan ketinggian (dh) pada suatu titik dapat dihitung dengan rumus:

$$dh \approx \frac{dh}{dx} \cdot dx + \frac{dh}{dy} \cdot dy$$

Dalam hal ini:

$$\frac{dh}{dx} = 4x + 3y$$

$$\frac{dh}{dy} = 3x + 8y$$

Evaluasi pada titik (2,-1):

$$\frac{dh}{dx} (2,-1) = 4(2) + 3(-1) = 5$$

$$\frac{dh}{dy} (2,-1) = 3(2) + 8(-1) = -2$$

Sekarang, substitusi ke dalam rumus pertambahan ketinggian:

$$dh \approx 5 \cdot 0.1 - 2 \cdot 0.05$$

$$dh \approx 0.5 - 0.1$$

$$dh \approx 0.4$$

Jadi, pertambahan ketinggian (dh) pada titik (2,-1) dengan $dx = 0.1$ dan $dy = -0.05$ adalah sekitar 0.4.

2. Analisis Aliran Fluida

Dalam geologi, pemahaman aliran fluida seperti air tanah atau magma di bawah permukaan tanah sangat penting. Kalkulus diferensial dan integral digunakan untuk mengembangkan model matematis yang menggambarkan aliran fluida, tekanan, dan distribusi massa fluida. Ilmu integral memiliki peran penting dalam memahami aliran fluida dan menyelesaikan masalah yang terkait dengan dinamika fluida. Konsep dasar integral sering digunakan dalam persamaan kontinuitas dan persamaan gerak fluida. Berikut adalah beberapa contoh penggunaan ilmu integral dalam aliran fluida:

a) Persamaan Kontinuitas

Persamaan kontinuitas adalah prinsip dasar dalam dinamika fluida yang menyatakan bahwa massa fluida yang masuk ke dalam suatu volume kontrol harus sama dengan massa yang keluar. Untuk mendapatkan persamaan ini dalam bentuk matematis, diperlukan integrasi selama suatu volume yang bergerak bersamaan dengan aliran fluida.

b) Persamaan Gerak (Eulerian dan Langsung)

Persamaan gerak Eulerian dan Langsung adalah persamaan dasar yang menggambarkan perubahan kecepatan dan tekanan dalam fluida.

Integrasi dalam konteks ini digunakan untuk memperoleh persamaan diferensial parsial yang dapat menggambarkan perubahan sifat-sifat fluida dalam ruang dan waktu.

c) **Teorema Transport Reynolds**

Integral sering digunakan dalam teorema transport Reynolds, yang merupakan alat matematika untuk memisahkan variabel-variabel dalam persamaan gerak Eulerian dan menggambarkan sifat-sifat transportasi fluida.

d) **Analisis Aliran Melalui Permukaan Kendali**

Untuk menganalisis aliran fluida melalui permukaan kendali tertentu, integral permukaan digunakan untuk menghitung jumlah aliran massa atau energi yang melintas melalui permukaan tersebut.

e) **Gaya pada Benda Tenggelam**

Integral digunakan untuk menghitung gaya dan momen yang bekerja pada suatu benda yang tenggelam dalam fluida. Hal ini sering diterapkan dalam konteks hukum Archimedes.

f) **Distribusi Tekanan dan Gaya pada Pipa**

Integrasi sering digunakan untuk menganalisis distribusi tekanan dalam suatu aliran fluida di dalam pipa dan untuk menghitung gaya yang bekerja pada pipa tersebut.

g) **Analisis Kecepatan dan Volume Kontrol**

Integral digunakan dalam konsep volume kontrol untuk menganalisis perubahan sifat-sifat fluida dalam suatu ruang tertentu.

h) **Energi Spesifik dan Daya**

Integrasi digunakan dalam perhitungan energi spesifik dan daya dalam aliran fluida. Ini dapat membantu dalam merancang sistem perpipaan dan pompa.

Contoh 3:

Sebuah pipa berbentuk silinder memiliki diameter dalam $D_1 = 0.1\text{m}$ dan diameter luar $D_2 = 0.15\text{m}$. Aliran air melalui pipa tersebut dengan kecepatan $v(r) = 2r \text{ m/s}$, di mana r adalah jari-jari pipa pada suatu titik

dalam pipa. Massa jenis air $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. Hitunglah massa total air yang melintasi penampang pipa dalam satu detik.

Penyelesaian:

a. tentukan batas integral

Pipa berbentuk silinder, sehingga kita akan menggunakan koordinat r sebagai jari-jari. Batas integral dapat diambil dari diameter dalam (D_1) hingga diameter luar (D_2), yaitu r dari 0.05m hingga 0.075m.

$$0.05 \leq r \leq 0.075$$

b. Tentukan fungsi kecepatan dan masa total

Fungsi kecepatan diberikan oleh $v(r) = 2r \text{ m/s}$.

Massa jenis air $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

Fungsi massa total $m(r) = \rho \cdot v(r) \cdot A(r)$, di mana $A(r)$ adalah luas penampang melintang pada jari-jari r .

Untuk silinder, $A(r) = \pi r^2$.

Sehingga, $m(r) = \rho \cdot v(r) \cdot \pi r^2$.

c. Integralkan

Hitung integral untuk mendapatkan nilai massa total. Substitusi nilai ρ , dan fungsi $v(r)$ ke dalam integral.

$$m = \int_{0,05}^{0,075} \rho \cdot v(r) \cdot \pi r^2 dr$$

$$m = \int_{0,05}^{0,075} 1000 \cdot (2r) \cdot \pi r^2 dr$$

$$m = 2000\pi \int_{0,05}^{0,075} r^3 dr$$

$$m = 2000\pi \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_{0,05}^{0,075}$$

$$m = 2000\pi \left(\frac{1}{4} \cdot 0.075^4 - \frac{1}{4} \cdot 0.05^4 \right)$$

$$m \approx 2000\pi \left(\frac{1}{4} \cdot 0.001171875 \right)$$

$$m \approx 3.676 \text{ kg}$$

Jadi, massa total air yang melintasi penampang pipa dalam satu detik adalah sekitar 3.676 kg.

3. Perubahan Fungsi Geologis

Konsep diferensiasi dalam kalkulus membantu menggambarkan perubahan suatu fungsi dalam konteks geologi. Misalnya, dapat digunakan untuk memodelkan laju erosi, pertumbuhan geologi, atau perubahan sifat batuan seiring waktu. Berikut penjelasannya:

a) Laju Erosi

Diferensiasi dapat digunakan untuk memodelkan laju erosi di suatu daerah geologis. Misalnya, dengan mengukur perubahan tinggi atau volume tanah yang tererosi terhadap waktu, kita dapat menghitung turunan dari fungsi tinggi tanah terhadap waktu untuk mendapatkan laju erosi.

Contoh 4:

Sebuah lereng di suatu daerah mengalami erosi seiring waktu. Tinggi tanah pada lereng tersebut pada suatu waktu t dapat dijelaskan oleh fungsi $h(t)$, di mana $h(t)$ diukur dalam meter. Fungsi ini diberikan oleh $h(t) = 5t^2 - 2t + 10$, dengan t dalam tahun. Hitunglah laju erosi pada tahun ke-3!

Penyelesaian:

Untuk menghitung laju erosi pada suatu waktu tertentu, kita menggunakan turunan pertama dari fungsi tinggi tanah terhadap waktu $h(t)$,

Turunan fungsi tanah:

$$h'(t) = \frac{dh}{dt}$$

$$h'(t) = \frac{dh}{dt} (5t^2 - 2t + 10)$$

$$h'(t) = 10t - 2$$

Lalu, substitusi Nilai Tahun ke-3:

Untuk menghitung laju erosi pada tahun ke-3 ($t = 3$), substitusikan $t = 3$ ke dalam turunan pertama $h'(t)$.

$$h'(3) = 10(3) - 2$$

$$h'(3) = 28$$

Laju erosi pada tahun ke-3 adalah 28 meters pertahun. Ini menunjukkan tingkat perubahan tinggi tanah pada saat itu.

Dengan demikian, dengan menghitung turunan pertama dari fungsi tinggi tanah terhadap waktu, kita dapat mendapatkan laju erosi pada titik waktu tertentu. Dalam contoh ini, laju erosi pada tahun ke-3 adalah 28 meters pertahun.

b) Pertumbuhan Geologi

Proses pertumbuhan geologi, seperti akresi atau sedimentasi, dapat dimodelkan menggunakan konsep diferensiasi. Dengan mengukur penambahan volume batuan atau material sedimen terhadap waktu, kita dapat memahami laju pertumbuhan dan menggambarkannya dalam bentuk turunan.

Contoh 5:

Sebuah danau di suatu wilayah mengalami proses sedimentasi. Tinggi air dalam danau (h) pada suatu waktu t dapat dijelaskan oleh fungsi $h(t)$, di mana $h(t)$ diukur dalam meter dan t dalam tahun. Fungsi ini diberikan oleh $h(t)=0.1t^2 + 0.5t + 3$.

1. Hitunglah laju pertumbuhan sedimentasi pada tahun ke-2.
2. Bagaimana interpretasi laju pertumbuhan tersebut dalam konteks sedimentasi dan akresi?

Penyelesaian

1. Hitung Laju Pertumbuhan pada Tahun ke-2

Untuk menghitung laju pertumbuhan, kita perlu mengambil turunan pertama dari fungsi $h(t)$ terhadap waktu (t).

$$h'(t) = \frac{dh}{dt}$$

$$h'(t) = \frac{dh}{dt} (0.1t^2 + 0.5t + 3)$$

$$h'(t) = 0.2t + 0.5$$

Substitusikan $t = 2$ untuk menghitung laju pertumbuhan pada tahun ke-2.

$$h'(2) = 0.2 (2) + 0.5$$

$$h'(2) = 0.9 \text{ meters pertahun}$$

2. Interpretasi

Laju pertumbuhan sedimentasi pada tahun ke-2 adalah 0.9 meters pertahun. Ini berarti pada tahun kedua, tinggi air dalam danau meningkat sebanyak 0.9 meter setiap tahunnya.

Interpretasi dalam konteks sedimentasi dan akresi: Laju pertumbuhan positif menunjukkan bahwa terjadi penambahan material sedimen atau akresi di dasar danau. Semakin tinggi laju pertumbuhan, semakin cepat penambahan material sedimen terjadi, dan ini dapat mempengaruhi ekosistem dan kondisi lingkungan di sekitar danau.

c) **Perubahan Sifat Batuan seiring Waktu**

Sifat-sifat batuan, seperti kekerasan atau kepadatan, dapat berubah seiring waktu karena tekanan, suhu, atau proses geologis lainnya. Konsep diferensiasi memungkinkan kita untuk memodelkan perubahan ini. Sebagai contoh, turunan dari fungsi yang menggambarkan sifat batuan terhadap waktu dapat memberikan informasi tentang tingkat perubahan tersebut.

4. **Pemodelan Kondisi Batuan**

Pemodelan matematis menggunakan persamaan diferensial parsial dapat membantu memahami dan memprediksi kondisi batuan, seperti distribusi suhu di dalam bumi, perpindahan panas, dan pergerakan lempeng tektonik.

5. **Analisis Data Geofisika**

Teknik geofisika seperti pemetaan seismik atau elektromagnetik menghasilkan data yang kompleks. Kalkulus dapat digunakan untuk mengembangkan metode analisis data yang efektif, seperti transformasi Fourier untuk analisis frekuensi.

6. **Penelitian Geokimia**

Dalam konteks kimia geologi, kalkulus dapat digunakan untuk menganalisis distribusi dan perubahan konsentrasi elemen atau senyawa kimia di dalam batuan atau cairan geologis.

Contoh 6:

Dalam proses penelitian geokimia, kita sering kali tertarik untuk mengetahui seberapa cepat suatu elemen kimia berubah dalam sebuah sampel mineral tertentu. Misalkan kita memiliki fungsi yang menggambarkan konsentrasi suatu elemen kimia dalam sampel sepanjang waktu, diberikan oleh fungsi $f(t) = 3t^2 - 4t + 2$, di mana $f(t)$ adalah konsentrasi elemen (dalam ppm) dan t adalah waktu (dalam hari).

Berapakah laju perubahan konsentrasi elemen tersebut setelah 3 hari?

Penyelesaian:

Laju perubahan konsentrasi elemen tersebut sepanjang waktu diberikan oleh turunan fungsi $f(t)$, atau $f'(t)$.

Pertama, kita harus mencari turunan $f(t)$

$$f(t) = 3t^2 - 4t + 2,$$

$$f'(t) = 6t - 4.$$

Kemudian, kita dapat mencari laju perubahan konsentrasi setelah 3 hari dengan menggantikan $t = 3$ ke dalam $f'(t)$, sehingga kita mendapatkan

$$f'(3) = 6(3) - 4 = 14.$$

Jadi, laju perubahan konsentrasi elemen tersebut setelah 3 hari adalah 14 ppm/hari.

B. Pemodelan Matematika dalam Geologi

Pemodelan matematika dalam geologi melibatkan penggunaan konsep matematika dan teknik statistik untuk menggambarkan dan memahami proses geologis serta menginterpretasi data geologis. Beberapa aspek pemodelan matematika dalam geologi melibatkan:

1) Pemodelan Aliran Fluida di Bawah Tanah (Hidrogeologi):

a) Pemodelan Arus Air Tanah

Menggunakan persamaan diferensial parsial untuk memodelkan pergerakan air tanah di bawah permukaan tanah.

Contoh 7:

Sebuah akuifer memiliki konduktivitas hidraulik $k = 5 \text{ m/h}$ dan luas penampang aliran $A = 10 \text{ m}^2$. Gradien hidrolik $\frac{dh}{dx}$ di suatu titik dalam akuifer adalah 0.002 m/m . Hitung laju aliran air tanah (Q) di titik tersebut!

Penyelesaian:

Maslah ini dapat diselesaikan dengan bantuan Hukum Darcy untuk menghitung laju aliran air tanah (Q) dengan rumus:

$$Q = -k \cdot A \cdot \frac{dh}{dx}.$$

Substitusi nilai yang diberikan:

$$Q = - (5\text{m/h}) \cdot (10\text{m}^2) \cdot 0.002\text{m/m}$$

Kemudian, hitung hasilnya:

$$Q = - 0.1 \text{ m}^3/\text{h} \cdot 0.002\text{m/m}$$

$$Q = - 0.0002 \text{ m}^3/\text{h}$$

b) Analisis Pemompaan Sumur

Memodelkan dampak pemompaan air tanah terhadap sistem akuifer menggunakan persamaan aliran fluida.

2) Pemodelan Pergerakan Lapisan Bumi:

a) Pemodelan Seismik

Menggunakan persamaan gelombang untuk memodelkan perjalanan gelombang seismik melalui lapisan bumi, membantu dalam menentukan struktur dan komposisi lapisan bumi.

b) Pemodelan Dinamika Lempeng

Menggunakan persamaan diferensial untuk memodelkan pergerakan lempeng tektonik dan menganalisis pembentukan gunung, lembah, dan batas lempeng.

3) **Pemodelan Evolusi Geologi:**

a) **Pemodelan Pembentukan Pegunungan dan Lembah**

Menggunakan persamaan diferensial dan konsep tektonik lempeng untuk memahami pembentukan topografi seperti pegunungan dan lembah.

b) **Pemodelan Proses Erosi**

Menggunakan persamaan diferensial untuk memodelkan perubahan topografi akibat erosi, sedimentasi, dan pergerakan tanah.

4) **Pemodelan Geokimia dan Analisis Data:**

a) **Pemodelan Distribusi Mineral**

Menggunakan analisis statistik untuk memodelkan distribusi mineral dan logam di bawah permukaan tanah.

Contoh 8:

Dalam pemodelan distribusi mineral di bawah permukaan tanah, pertimbangkan distribusi mineral $M(x)$ di sepanjang sumbu x yang dapat dijelaskan oleh persamaan diferensial $\frac{dM}{dx} = -2x$, dengan x dalam meter. Tentukan fungsi distribusi mineral $M(x)$ menggunakan metode integral.

Penyelesaian:

Persamaan diferensial ini dapat dipecahkan dengan cara mengintegrasikannya dengan kondisi awal yang sesuai, seperti berikut:

- Integrasi Pertama

$$\int \frac{dM}{dx} dx = \int -2x dx$$

Integrasi pertama memberikan:

$$M(x) = -x^2 + C_1$$

Di mana C_1 adalah konstanta integrasi.

- Kondisi Awal

Jika memiliki informasi tambahan, seperti kondisi awal

$M(0) = M_0$, kita dapat menentukan nilai konstanta C_1 .

Dalam hal ini, substitusi $M(0) = M_0$ ke dalam persamaan:

$$M(0) = -0^2 + C_1$$

$$M_0 = C_1$$

Jadi, $C_1 = M_0$.

- Substitusi Nilai

Substitusi nilai C_1 ke dalam persamaan:

$$M(x) = -x^2 + M_0$$

Jadi, fungsi distribusi mineral $M(x)$ adalah

$$M(x) = -x^2 + M_0$$

b) Pemodelan Kimia Air Tanah

Menggunakan persamaan reaksi kimia dan transportasi untuk memodelkan distribusi zat kimia dalam air tanah.

5) Pemodelan Dinamika Fluida di Laut dan Sungai:

Pemodelan Arus Laut dan Sungai

Menggunakan persamaan Navier-Stokes untuk memodelkan pergerakan air di laut dan sungai, membantu memahami pola arus, gelombang, dan pasang surut.

6) Pemodelan Karakterisasi Batuan dan Reservoir Minyak/Batu Bara:

a) Pemodelan Porositas dan Permeabilitas

Menggunakan persamaan matematika untuk karakterisasi properti fisik batuan dan reservoir minyak/batu bara.

Contoh 9

Dalam pemodelan porositas dan permeabilitas batuan reservoir, pertimbangkan fungsi porositas $\phi(x)$ dan fungsi permeabilitas $k(x)$ di sepanjang sumbu x . Fungsi porositas dapat dijelaskan oleh persamaan diferensial $\frac{d\phi}{dx} = -0.03x$, dan fungsi permeabilitas dapat dijelaskan oleh $\frac{dk}{dx} = 0.2e^{0.1x}$. Tentukan persamaan porositas dan permeabilitas menggunakan metode diferensial.

Penyelesaian:

Pemodelan Porositas ($\phi(x)$):

Integrasi persamaan diferensial $\frac{d\phi}{dx} = -0.03x$

$$\int \frac{d\phi}{dx} dx = \int -0.03x dx$$

Integrasi memberikan:

$$\phi(x) = -0.015x^2 + C_1$$

Konstanta integrasi C_1 akan ditentukan oleh kondisi awal atau informasi tambahan.

Pemodelan Permeabilitas ($k(x)$):

Integrasi persamaan diferensial $\frac{dk}{dx} = 0.2e^{0.1x}$

$$\int \frac{dk}{dx} dx = \int 0.2e^{0.1x} dx$$

Integrasi memberikan:

$$k(x) = 2e^{0.1x} + C_2$$

Konstanta integrasi C_2 akan ditentukan oleh kondisi awal atau informasi tambahan.

Kondisi Awal:

Jika kita memiliki informasi tambahan, seperti kondisi awal $\phi(0) = \phi_0$ dan $k(0) = k_0$, kita dapat menentukan nilai konstanta C_1 dan C_2 . Substitusi $\phi(0) = \phi_0$ dan $k(0) = k_0$ ke dalam persamaan porositas dan permeabilitas:

$$\phi_0 = C_1$$

$$k_0 = 2 + C_2$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan ini, kita dapat menentukan nilai C_1 dan C_2 .

Jadi, persamaan porositas dan permeabilitas adalah $\phi(x) = -0.015x^2 + \phi_0$ dan $k(x) = 2e^{0.1x} + k_0$ berdasarkan rumus diferensial.

- b) Simulasi Reservoir:** Menggunakan model matematika untuk memprediksi perilaku reservoir minyak atau gas alam selama eksploitasi.

Pemodelan matematika dalam geologi membantu geologis dan ahli geofisika untuk membuat prediksi tentang proses geologis yang kompleks dan memahami perilaku sistem bumi yang sangat dinamis. Ini memungkinkan peneliti dan praktisi geologi untuk membuat keputusan yang lebih baik dalam eksplorasi sumber daya alam, manajemen lingkungan, dan mitigasi risiko bencana geologis.

Latihan 6.1:

1. Sebuah sungai membawa material sedimen dari pegunungan ke dataran rendah. Tinggi tumpukan sedimen di dasar sungai (h) pada suatu waktu t dapat dijelaskan oleh fungsi $h(t)$, di mana $h(t)$ diukur dalam meter dan t dalam bulan. Fungsi ini diberikan oleh $h(t) = 0.02t^3 - 0.5t^2 + 10t + 2$.
 - a. Hitunglah laju pertumbuhan sedimentasi pada bulan ke-5.
 - b. Apa arti laju pertumbuhan tersebut dalam konteks sedimentasi sungai?
2. Suatu lereng mengalami pergerakan tanah yang dapat dimodelkan dengan fungsi tinggi lereng $h(x)$, di mana $h(x)$ diukur dalam meter dan x adalah jarak horizontal di sepanjang lereng. Fungsi $h(x)$ diberikan oleh persamaan $h(x) = 30 - 2x^2$, di mana x diukur dalam meter. Tentukan total volume tanah yang bergeser di sepanjang lereng dari $x = 0$ hingga $x = 5$ meter!
3. Suatu lereng mengalami pergerakan aliran lumpur yang dapat dimodelkan dengan fungsi kecepatan aliran $v(x)$, di mana $v(x)$ diukur dalam meter per detik dan x adalah jarak horizontal di sepanjang lereng. Fungsi $v(x)$ diberikan oleh persamaan $v(x) = 5 - 0.2x$, di mana x diukur dalam meter. Tentukan total volume lumpur yang melintasi suatu penampang melintang pada interval $x = 0$ hingga $x = 10$ meter.

REFERENSI

- Abdul Muis. (2002). *Perang Siasat Matematika Dasar*. Yogyakarta: Lembaga Pendidikan Teknogama.
- Anton, H. and C. Rorres. (2005). *Elementary Linear Algebra* , 9 th ed, John Wiley & Sons, Inc.2.
- Aulia, M. R., Putranto, T. T., & Setyawan, R. (2020). Karakteristik Reservoir Berdasarkan Analisis Petrofisik Pada Formasi Baturaja, Lapangan Aulia, Cekungan Jawa Barat Utara. *Jurnal Geosains dan Teknologi*, 3(1), 31-41.
- Ayres, F. (1981). *Differential and integral calculus. Schaum's Outline Series*. New York: McGraw-Hill International
- Darmawan, A., & Lastiadi, H. A. (2010). Geologi lingkungan dan fenomena kars sebagai arahan pengembangan wilayah perkotaan Kupang, Nusa Tenggara Timur. *Jurnal Lingkungan dan Bencana Geologi*, 1(1), 11-26.
- Kartini, Suprpto, Nur Akhsin. (2005). *Matematika Program Studi Ilmu Alam Kelas XII untuk SMA dan MA*. Klaten: PT Intan Pariwara.
- Latorre, Donald R.; Kenelly, John W.; Reed, Iris B.; Biggers, Sherry (2007), *Calculus Concepts: An Applied Approach to the Mathematics of Change*, Cengage Learning, hlm. 2, ISBN 0-618-78981-2, Chapter 1, p 2
- Leithold, L. (1976). *The Calculus with Analytic Geometry*. New York: Happer International Edition, Harper & Row. Publisher.
- Martono, Koko. (1999). *Kalkulus*. Jakarta: Erlangga
- Purcell, Edwin.J. & Dale Varverg. (1987) *Kalkulus dan Geometri Analitis jilid 1*. Jakarta: Erlangga.
- Purcell and Varberg. (1992). *Kalkulus dan GeometrikAnalitis*. Jakarta: Ed. 5 (Diterjemahkan oleh susila, dkk). Erlangga.
- Purcell, Edwin J., dan Dale Verberg. (1987). *Calculus with Analytic Geometry*, ed 5. Terjemahan Susila, I Nyoman, dkk. Kalkulus dan Geometri Analitis. Indonesia: Penerbit Erlangga.

Purcell, Edwin J., Dale Verberg., dan Steve Rigdon. (2007). *Calculus*, ed 9. Penerbit Pearson

Richard G. Brown (1994). *Advanced Mathematics* . California: Houghton Mifflin Company.

Rinaldi Munir (2012). *Matematika Diskrit*. Bandung : Informatika Bandung

Ross,L., Shepley. (1980). *Introduction to Ordinary Differential Equations. Inc.* New York: John Wiley &. Sons.

Soemartojo, Noeniek. (1987). *Kalkulus lanjut*. Jakarta: UIP

Spiegel, R, M. (1987). *Theory and Problems of Complex Variable*. Singapore: McGraw-Hill. Inc.

Tarhadi, Dkk. (2007). *Kalkulus Lanjut*. Jakarta: UT
http://en.wikibooks.org/wiki/Linear_Algebra/Solving_Linear_Systems

SURAT PENCATATAN CIPTAAN

Dalam rangka perlindungan ciptaan di bidang ilmu pengetahuan, seni dan sastra berdasarkan Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta, dengan ini menerangkan:

Nomor dan tanggal permohonan : EC00202406982, 19 Januari 2024

Pencipta

Nama : Endang Istikomah
Alamat : Jl. Katio, Perum. Taman Airis, No. 1, Marpoyan Damai, Pekanbaru, Riau, 28282
Kewarganegaraan : Indonesia

Pemegang Hak Cipta

Nama : Endang Istikomah
Alamat : Jl. Katio, Perum. Taman Airis, No. 1, Marpoyan Damai, Pekanbaru, Riau 28282
Kewarganegaraan : Indonesia
Jenis Ciptaan : Buku
Judul Ciptaan : Kalkulus 2
Tanggal dan tempat diumumkan untuk pertama kali : 19 Januari 2024, di Pekanbaru di wilayah Indonesia atau di luar wilayah Indonesia
Jangka waktu perlindungan : Berlaku selama hidup Pencipta dan terus berlangsung selama 70 (tujuh puluh) tahun setelah Pencipta meninggal dunia, terhitung mulai tanggal 1 Januari tahun berikutnya.
Nomor pencatatan : 000582352

adalah benar berdasarkan keterangan yang diberikan oleh Pemohon.

Surat Pencatatan Hak Cipta atau produk Hak terkait ini sesuai dengan Pasal 72 Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta.

a.n. MENTERI HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA
Direktur Hak Cipta dan Desain Industri



Anggoro Dasananto
NIP. 196412081991031002