Hj. Zetriuslita, S.Pd.,M.Si

MUDAH MEMAHAMI ANALISIS KOMPLEKS

MUDAH MEMAHAMI ANALISIS KOMPLEKS

Penyusun:
Hj. Zetriuslita, S.Pd.,M.Si

Editor:
....

Desain Cover:
Budi "cc-line" Yuwono

Layout Isi:
Endro 'JazameDIA'

Diterbitkan oleh:
Fahma Media
Sono, Wedomartani, Sariharjo,
Ngaglik, Sleman, Yogyakarta

Cetakan Pertama, Agustus 2014

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim

Buku yang ada di hadapan pembaca ini terinspirasi dari pengalaman penulis sebagai dosen pengampu mata kuliah Analisis Kompleks. Begitu susahnya mahasiswa memahami mata kuliah Analisis Kompleks. Hal ini terbukti dari hasil ujian semester yang menunjukkan banyaknya mahasiswa yang mendapat nilai C, D bahkan E. Mahasiswa yang mendapat nilai A dan B bisa dihitung dengan jari.

Sudah lama sebenarnya penulis ingin menyelesaikan karya ini. Namun sempitnya waktu dan ditambah lagi kesibukan penulis sebagai Ketua Program Studi 2 periode (2004 s/d 2012) mengakibatkan proses pembuatan buku ajar Analisis Kompleks ini baru bisa terselesaikan tahun ini. Melalui buku berjudul **'Mudah Memahami Analisis Kompleks'** ini, penulis berharap mahasiswa dapat lebih mudah memahami mata kuliah ini.

Buku ini disetting sedemikian rupa sehingga mengikuti silabus mata kuliah, Pembahasan buku ini terdiri dari lima. Bab I membahas tentang bilangan kompleks. Sedangkan bab II membahas fungsi, limit dan kekontinuan fungsi kompleks. Turunan fungsi kompleks diulas di bab III, kemudian dilanjut- kan pembahasan integral fungsi kompleks di bab IV. Pada bab V, penulis menyajikan ulasan tentang barisan dan deret bilangan kompleks. Masing-masing bab diuraikan secara gamblang, mulai dari pengertian, sifat-sifat hingga latihan penyelesaian soal-soal.

Rasa syukur penulis haturkan ke hadirat Allah *Ta'ala*, sebab hanya atas berkat, rahmat dan hidayah-Nya, buku ini dapat diselesaikan. Shalawat dan salam semoga senantiasa tercurah-kan kepada junjungan kita Nabi Muhammad *Shalallahu 'alaihi wasallam.*

Sebelumnya tak pernah terpikir oleh penulis untuk menerbitkan buku ini. Masih banyak ilmu yang belum penuli kuasai dan minimnya pengalaman dalam dunia kepenulisan adalah ganjalan utama dalam proses penyelesaian buku ini. Meski de-mikian, hal ini tidak mengurangi hasrat penulis untuk selalu mencoba lebih baik dan lebih baik lagi. Apalagi dalam profesi sehari-hari sebagai dosen, penulis selalu berusaha mengembangkan diri dan berpikir untuk selalu berkarya dan membagi manfaat kepada orang lain. Buku ini diterbitkan atas bantuan dana dari pihak Universitas Islam Riau. Untuk itu penulis mengucapkan terimakasih yang tak terhingga kepada pihak Universitas Islam Riau sehingga buku ini bisa diterbitkan.

Ucapan terima kasih secara khusus dan teristimewa penu- lis haturkan kepada Ibunda penulis yang selalu senantiasa ber- mohon kepada Allah, semoga anaknya selalu diberi Allah ke- mudahan dalam menjalani hidup ini. Kepada suami tercinta, Dr. H. Eddy Asnawi, SH., M.Hum dan anak-anak; Muhammad Ghaffar, Muhammad Luthfi dan Muhammad Aziz Habiburra- him, yang telah menjadi sumber inspirasi yang tak ada habisnya dalam menjalani aktivitas penulis, baik sebagai dosen maupun sebagai sebagai orangtua. Kepada Ayah dan anak penulis yang kedua, Muhammad Thariq Al-Ikram, yang keduanya telah almarhum, buku ini menjadi sebuah tanda penghormatan dan doa dari penulis, semoga Allah SWT memberikan ampunanNya.

Semoga buku ini bermanfaat bagi pembaca khususnya mahasiswa di lingkungan program studi Pendidikan Matematika FKIP UIR dan umumnya pemerhati Matematika.

Penulis yakin, buku ini masih banyak terdapat kekurangan. Kritik dan saran yang konstruktif sangat penulis harapkan demi perbaikan buku ini ke depan.

Pekanbaru, April 2014

Penulis,

- oOo -

DAFTAR ISI

- oOo -

BAB 1
BILANGAN KOMPLEKS

A. Definisi

Sebelum mengenal lebih jauh himpunan bilangan kompleks, akan diperkenalkan terlebih dahulu bilangan imajiner atau bilangan khayal. Dalam himpunan bilangan real **R,** kita tidak dapat menyelesaikan persamaan $x^2+1=0$, karena akan diperoleh $\pm\sqrt{-1}$. Sehingga untuk menyelesaikan persamaan tersebut, kita memerlukan himpunan bilangan yang baru. Himpunan bilangan baru ini dinamakan himpunan bilangan imajiner atau bilangan khayal.

Bilangan imajiner atau bilangan khayal adalah bilangan yang merupakan akar kuadrat dari suatu bilangan negatif, misalnya $\sqrt{-5}, \sqrt{-7}, \sqrt{-13}, \sqrt{-16}$, $\sqrt{-25}$ dan sebagainya. Jika bilangan real **R** digabungkan dengan bilangan imajiner atau bilangan khayal, maka disebut bilangan kompleks. Himpunan bilangan kompleks yang secara umum disimbolkan dengan ***Z*** telah banyak aplikasinya dalam bidang fisika. Konsep bilangan kompleks secara alamiah muncul pada abad ke-16, yaitu ketika para ahli matematika ingin meng-ekspresikan seluruh akar dari *polynomial.*

Definisi 1

Bilangan kompleks adalah bilangan yang berbentuk $z = x + iy$, di mana x dan y bilangan real dan $i^2 = -1$. Jika nilai $x \neq 0$ dan $y = 0$ maka $z = x + iy$, merupakan bilangan kompleks yang real. Jika nilai $x = 0$ dan $y \neq 0$ maka $z = x + iy$, merupakan bilangan imajiner murni. Notasi bilangan kompleks dinyatakan dengan huruf *z,* sedang huruf ***x*** dan ***y*** menyatakan bilangan real. Himpunan semua bilangan kompleks diberi notasi **Z**. Jadi

$$\boldsymbol{Z} = \{ z \mid z = x + iy,\ x \in \boldsymbol{R},\ y \in \boldsymbol{R} \}.$$

Jika $\boldsymbol{z = x + iy}$ menyatakan sembarang bilangan kompleks, maka x dinamakan bagian real dan $\boldsymbol{y}$ bagian imajiner dari z. Bagian real dan bagian imaginer dari bilangan kompleks z biasanya dinyatakan dengan *Re(z)* dan *Im(z)*.

Definisi 2

Bilangan kompleks $z_1=x_1+iy_1$ dan bilangan kompleks $z_2=x_2+iy_2$ dikatakan sama, yaitu $z_1=z_2$, jika dan hanya jika $x_1=x_2$ dan $y_1=y_2$.

Dapat juga bilangan kompleks z dituliskan pasangan terurut (x,y) dari bilangan nyata x dan y.

B. Operasi Pada Bilangan Kompleks

Penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian dua bilangan kompleks didefinisikan sebagai berikut:

Misalkan

$z_1 = (x_1,y_1) = (x_1 + i\,y_1)$ dan $z_2 = (x_2, y_2) = (x_2 + i\,y_2)$, maka:

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ atau

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$

$z_1 - z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ atau

$z_1 - z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$

$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 - x_2y_1)$

atau $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 - x_2y_1)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2}$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1\ y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\ \frac{x_2y_1 - x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

C. Sifat-Sifat Bilangan Kompleks

1. Sifat Tertutup

a. Tertutup terhadap Penjumlahan
Artinya jika z_1 dan z_2 adalah anggota bilangan kompleks maka $z_1+z_2 \in Z$
atau jika $z_1, z_2 \in Z$, maka $z_1 + z_2 \in Z$

b. Tertutup terhadap Pengurangan
Artinya jika z_1 dan z_2 adalah anggota bilangan kompleks maka $z_1 - z_2 \in Z$
atau jika $z_1, z_2 \in Z$ maka $z_1 - z_2 \in Z$

c. Tertutup terhadap Perkalian
Artinya jika z_1 dan z_2 adalah anggota bilangan kompleks maka $z_1.z_2 \in Z$
atau jika $z_1, z_2 \in Z$ maka $z_1.z_2 \in Z$.

d. Tertutup terhadap Pembagian
Artinya jika z_1 dan z_2 adalah anggota bilangan kompleks maka $z_1/z_2 \in Z$

2. Sifat Komutatif

a. Komutatif Penjumlahan : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
b. Komutatif Perkalian : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

3. Sifat Assosiatif

a. Assosiatif Penjumlahan : $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
b. Assosiatif Perkalian : $(z_1 \,.\, z_2)\, z_3 = z_1(z_2 \,.\, z_3)$

4. Sifat Distributif

a. Distributif perkalian terhadap penjumlahan

$(z_1 + z_2)\, z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ atau

$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

b. Distributif perkalian terhadap pengurangan

$(z_1 - z_2)\, z_3 = z_1 z_3 - z_2 z_3$ atau

$z_1(z_2 - z_3) = z_1 z_2 - z_1 z_3$

5. Sifat Identitas

a. Identitas terhadap penjumlahan

$z \in Z$ di mana $0 + 0i = 0 \in Z$ sehingga $z + 0 = 0 + z = z$

b. Identitas terhadap perkalian

$z \in Z$ di mana $1 + 0i = 1 \in Z$ sehingga $z \,.\, 1 = 1 \,.\, z = z$

6. Sifat Invers

a. Invers terhadap penjumlahan

$z \in Z$ di mana invers dari z adalah $-z \in Z$ sehingga $z + (-z) = 0$

b. Invers terhadap perkalian

$z \in Z$ di mana invers dari z adalah $z^{-1} \in Z$ sehingga $z \,.\, z^{-1} = 1$

D. Bilangan Kompleks Sekawan

1. Pengertian Bilangan Kompleks Sekawan

Jika $z = x + iy = (x,y)$ bilangan kompleks, maka bilangan kompleks sekawan konjuget) dari z ditulis $\bar{z}$, didefinisikan sebagai $\bar{z} = x - iy = (x,- y)$. Dari $z = x + iy$ dan $\bar{z} = x - iy$, diperoleh $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ dan $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

2. Sifat-Sifat Bilangan Kompleks

Operasi aljabar bilangan kompleks sekawan di dalam himpunan bilangan kompleks memenuhi sifat-sifat berikut:

a. Jika z bilangan kompleks, maka:
   1) $z = \bar{\bar{z}}$
   2) $z + \bar{z} = 2\,Re(z)$
   3) $z - \bar{z} = 2\,Im(z)$
   4) $z \cdot \bar{z} = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2$

b. Jika z_1, z_2 bilangan kompleks, maka **:**
   1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
   2) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
   3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

   $$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

E. Arti Geometris Bilangan Kompleks pada Bidang Kompleks

1. Arti geometris bilangan kompleks

Bidang kompleks diberi nama bidang Argand atau bidang **Z**. Jika $z = x + yi$ adalah bilangan kompleks, maka z dapat digambarkan pada bidang Argand atau bidang **Z**. Sebagai arti geometris bilangan kompleks adalah:

Gambar 1

Representasi Bilangan Kompleks Z Pada Bidang Kompleks

2. Arti geometris penjumlahan bilangan kompleks

Jika $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, maka $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$ dapat digambarkan pada bidang Argand atau bidang z sebagai berikut.

Gambar 2

Representasi $z_1 + z_2$ pada bidang kompleks

3. **Arti geometris pengurangan bilangan kompleks**
Jika $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, maka $z_1 - z_2$ digambarkan pada bidang Argand atau bidang z.

Gambar 3
Representasi $z_1 - z_2$ pada bidang kompleks

F. Modulus (Nilai Mutlak) Bilangan Kompleks

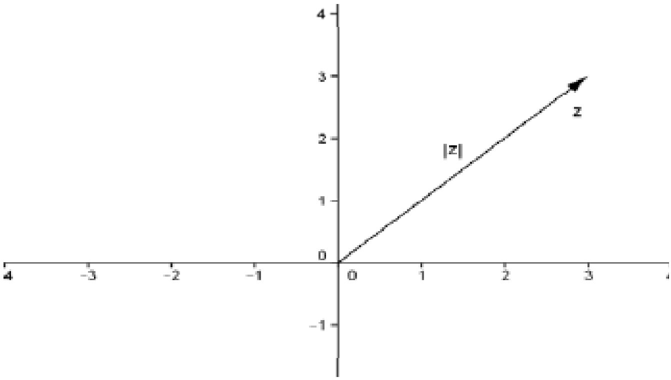
Definisi 3

Modulus (Nilai Mutlak) dari bilangan kompleks z dilambangkan dengan $|z| = |x + iy|$

Adapun nilai dari $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ di mana nilainya adalah bilangan riil.

Arti geometris $|z|$ menyatakan panjang garis yang terbentuk dari titik *(0,0)* ke *(x,y)* pada bidang kompleks (bidang Argand) atau panjang vektor *(x,y)* yaitu jarak dari titik asal 0 terhadap titik $z = (x,y)$.

Adapun gambar $|z|$ pada bidang kompleks adalah:



Gambar 4

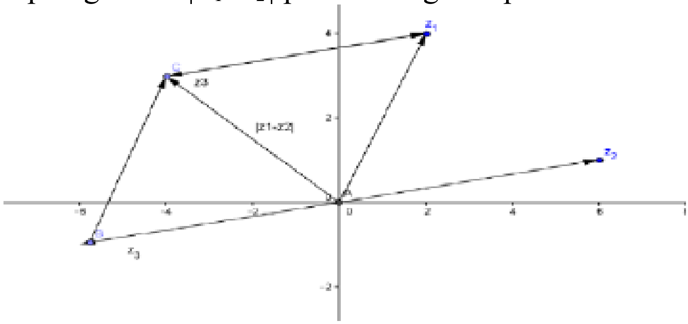
Representasi$|z|$ pada bidang kompleks

Akibat definisi di atas, jika $z_1 = x_1+iy_1$, $z_2 = x_2+iy_2$, maka:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \quad (y_1 - y_2)^2}$$

menyatakan jarak antara titik $z_1$dan z_2 pada bidang kompleks.

Adapun gambar $|z_1 - z_2|$ pada bidang kompleks adalah:



Gambar 5

Representasi$|z_1 - z_2|$ pada bidang kompleks

Sifat- sifat dari nilai mutlak bilangan kompleks

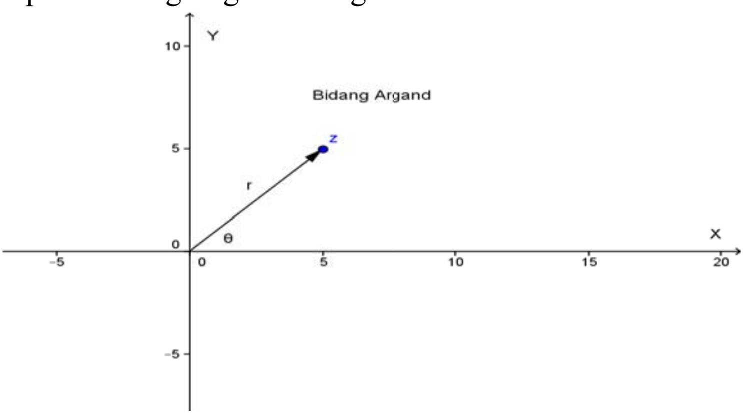
1. Jika z bilangan kompleks, maka:

a. $|z|^2 = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2$
b. $|z| = |\bar{z}|$
c. $|z|^2 = z\bar{z}$
d. $|z| \geq |Re(z)| \geq Re(z)$
e. $|z| \geq Im(z)| \geq Im(z)$

2. Jika z_1 dan z_2 bilangan kompleks, maka:
   a. $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$
   b. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$
   c. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
   d. $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$
   e. $|z_1 - z_2| \geq \big|\,|z_1| - |z_2|\,\big|$

G. Bentuk Polar (Kutub) dan Eksponen dari Bilangan Kompleks

Dalam koordinat polar bilangan kompleks $z= (x,y)$ dinyatakan dengan r dan θ yaitu $z =(r, \theta)$. Dari gambar di bawah ini, didapat $x = r \cos\theta$, $y = r \sin$, r = $\sqrt{x^2 + y^2}= |z|$, θ adalah sudut antara sumbu x positif dengan *oz*. Bilangan kompleks ini dapat digambarkan pada bidang Argand sebagai berikut:



Gambar 6
Representasi $z = r\cos\theta + i\sin\theta$ pada bidang kompleks

Untuk $z \neq 0$, sudut θ dihitung dari $tan\ \theta = y/x$, jika $z = 0$, maka $r=0$ dan θ dapat dipilih sembarang.
Dari keterangan di atas, maka bentuk polar (kutub) dari bilangan kompleks $z= (x,y) = x + iy$ dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$z = r\ (cos\ \theta + i\ sin\ \theta)$$

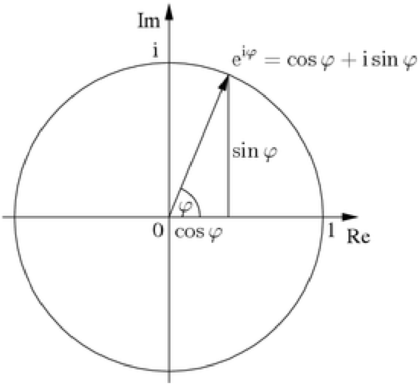
Definisi 4

Pada bilangan kompleks $z=r(cos\ \theta + i\ sin\ \theta)$, sudut θ disebut argument dari z ditulis $\theta = \arg(z)$. Sudut θ dengan $0 < \theta < 2\pi$ atau $-\pi < \theta < \pi$ disebut argument utama dari z.

Definisi 5

Dua bilangan kompleks $z_1=r_1\ (cos\ \theta_1 + i\ sin\ \theta_1)$ dan $z_2 = r_2\ (cos\ \theta_2 + i\ sin\ \theta_2)$ dikatakan sama yaitu $z_1 = z_2$ jika $r_1 = r_2$ dan $z_1 = r_1$ dan $\theta_1 = \theta_2$.

Rumus Euler : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, dapat digambarkan dalam bidang kompleks



Dengan menggunakan rumus Euler, bentuk polar bilangan kompleks dapat dirubah menjadi

$$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta\,) = r\,e^{i\theta}$$

Ini merupakan bentuk pangkat dari bilangan komplek z

Contoh:
Nyatakan bilangan kompleks $z = \sqrt{3} + i$ dalam bentuk polar dan eksponen

Jawab:
$z = \sqrt{3} + i$, diperoleh $r = 2$dan $\theta = \frac{\pi}{6}$ (kuadran I), sehingga
bentuk polar dari $z = \sqrt{3} + i$ adalah: $z = 2\,(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$ dan bentuk eksponennya adalah $z = 2\,e^{\pi i/6}$

H. Pangkat dan Akar Bilangan Kompleks

1. Pangkat Bilangan Kompleks

Rumus De'Moivre untuk n bilangan asli

Apabila,

$z_1 = r_1\,(\cos\theta_1 + \sin\theta_1) = r_1\,cis\;\theta_1$

$z_2 = r_2\,(\cos\theta_2 + \sin\theta_2) = r_2\,cis\;\theta_2$

.

.

.

$z_n = r_n\cos(\theta_n + \sin\theta_n) = r_n\,cis\;\theta_n$,n bilangan asli

maka dari itu rumus perkalian dua bilangan kompleks dapat dilanjutkan secara induktif dan didapat:

$z_1 z_2 z_3 \ldots z_n = r_1 r_2 r_3 \ldots r_n \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots + \theta n)$ (1)

Akibatnya, jika $z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = z_n$, maka dari (1) diperoleh $r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = r_n$ dan $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \ldots = \theta_n$ sehingga diperoleh rumus De`Moivre yaitu:

$z^n = (\cos\theta + i \sin\theta)^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$

Khususnya untuk $r = 1$, didapat:

$$\boxed{z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i \sin n\theta) = \text{cis}\, n\theta}$$

2. Pembagian Dua Bilangan Kompleks

Untuk pembagian bilangan kompleks $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \sin\theta_1)$ oleh $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \sin_2)$ adalah :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} x \frac{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \sin\theta_2)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right] \qquad (1)$$

Dari rumus (1) diperoleh :

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2$$

Akibat lain jika $z = r(\cos\theta + i \sin \theta)$, maka :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]$$

Apabila z^{-n} manyatakan $\frac{1}{z^n}$, n bilangan asli, maka :

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{\mathrm{r}^{\mathrm{n}}\ (\cos \mathrm{n}\theta + \mathrm{i} \sin \mathrm{n}\theta)} =$$

$$\frac{1}{\mathrm{r}^{\mathrm{n}}\ (\cos \mathrm{n}\theta + \mathrm{i} \sin \mathrm{n}\theta)} x \frac{(\cos \mathrm{n}\theta - \mathrm{i} \sin \mathrm{n}\theta)}{(\cos \mathrm{n}\theta - \mathrm{i} \sin \mathrm{n}\theta)}$$

$$z^{-n} = \frac{1}{r^n}[\cos n\theta \ - i \sin n\theta]$$

$$z^{-n} = \frac{1}{r^n}\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta) = \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

Contoh:

Diketahui:

z_1=2-2$\boldsymbol{i}$ dan z_2=$\sqrt{2} + i\sqrt{2}$. Tentukan nilai $\frac{\mathbf{z_1}}{\mathbf{z_2}}$

Jawab:

Dari rumus di atas, ditentukan dulu r_1 dan r_2 serta θ_1 dan θ_2, maka diperoleh:

r_1= 2 $\sqrt{2}$ dan r_2 = 2 serta $\theta_1 = \frac{7}{4}\pi$ dan $\theta_2 = \frac{1}{4}\pi$. Dari persamaan (1) diperoleh:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right] = -i\sqrt{2}$$

3. Akar dari Bilangan Kompleks

Setelah kita membahas bentuk pangkat, maka selanjutnya kita akan membahas bentuk akar dari bilangan kompleks, yaitu:

Misalkan $w^n = z$ maka $w = \sqrt[n]{z}$ atau w = $z^{1/n}$

Nilai-nilai akar sebanyak n buah nilai dari bentuk $\sqrt[n]{z}$ dapat diperoleh dengan mengacu pada kedua bentuk persamaan dalam bentuk polar berikut ini, yaitu:

$$z = r(\cos\theta + \sin\theta) \text{ dan } w = R(\cos\vartheta + \sin\vartheta)$$

Maka bentuk $w^n = z$ akan menjadi:

$$w^n = R^n(\cos n\emptyset + i\sin n\emptyset) = z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Dari persamaan di atas, didapatkan $R^n = r$, sehingga $R = \sqrt[n]{r}$ sedangkan nilai argumen-argumennya adalah:

$$n\emptyset = \theta + 2k\pi \quad \text{sehingga} \quad \emptyset = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

k adalah bilangan integer, yaitu *k = 0,1,2,...., n – 1*, untuk mendapatkan *n* buah nilai yang berbeda.

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\,sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

atau

$$w = z^{1/n} = r^{1/n}\left(cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\,sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

Ke-*n* buah nilai tersebut terletak pada suatu lingkaran yang berjari-jari $\sqrt[n]{r}$ dengan pusat lingkaran terletak dititik asal dan membentuk suatu polygon beraturan bersisi *n*.

Bilangan kompleks *z* adalah akar ke-*n* dari bilangan kompleks *w*, jika $z^n = w$, dan ditulis $z = r^{\frac{1}{n}}$ jika $z = \rho\,(cos\emptyset + i\sin\emptyset)$ akar ke-*n* dari bilangan kompleks $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, maka

$$z^n = w$$

$$\rho^n(\cos n\emptyset + i\sin n\emptyset) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

dari persamaan ini diperoleh

$\rho^n = r\,; n\emptyset = \theta + 2k\pi$, k bilangan bulat

Akibatnya $\rho = r^{\frac{1}{n}}$ dan $\emptyset = \frac{\theta+2k\pi}{n}$, sehingga akar ke-*n* dari bilangan kompleks $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ adalah

$$z = r^{\frac{1}{n}}\left[cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

k bilangan bulat dan *n* bilangan asli

ada *n* buah akar berbeda yang memenuhi $z^n = w$.

Untuk memudahkan, dipilih bilangan bulat $k = 0, 1, 2, 3, ..., (n\text{-}1); \theta \leq \frac{\theta+2k\pi}{n} < 2\pi$ sehingga $z_1, z_2, ..., z_n$ sebagai akar ke n dari w

I. Hasil Kali Titik dan Silang

1. Hasil kali Titik Dua Bilangan Kompleks

Misalkan $z_1 = x_1 + iy_1$ *dan* $z_2 = x_2 + iy_2$ dua bilangan kompleks (vektor).

Hasil kali titik dari z_1 dan z_2 (juga dinamakan hasil kali skalar) didefinisikan dengan:

$$z_1 o\, z_2 = |z_1||z_2| \cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2 = Re\,\{\bar{z}_1 . z_2\} = \frac{1}{2}\{\bar{z}_1 . z_2 + z_1 \bar{z}_2\}$$

di mana θ sudut antara z_1 dan z_2 yang terletak antara 0 dan л.

Sifat yang dapat diturunkan dari definisi di atas adalah sebagai berikut :

1. Bila $z_1 o\, z_2 > 0$ maka θ merupakan sudut lancip
2. Bila $z_1 o\, z_2 < 0$ maka θ merupakan sudut tumpul
3. Bila $z_1\ o\ z_2 = 0$ maka $\theta = 90^0$ atau z_1 dan z_2 saling tegak lurus/ortogonal

Sifat-sifat Hasil Kali Titik pada Bilangan Kompleks

Jika z_1, z_2 dan z_3 adalah tiga buah vektor kompleks, dan m sebuah skalar, maka berlaku:

1) $z_1\, o\, z_2 = z_2 o\, z_1$ (sifat komutatif)
2) $(z_1\, o\, z_2)\, o\, z_3 = z_1\, o\, (z_2\, o\, z_3)$ (sifat asosiatif)
3) $z_1 o\, (z_2 + z_3) = z_1 o\, z_2 + z_1 o\, z_3$ (sifat distributif)
4) $m\,(z_1 o\, z_2) = (mz_1)\, o\, z_2 = z_1 o\ (mz_2)$ (sifat perkalian dengan skalar m)

5) $z_1 \circ z_2 = 0$, (garis z_1 dan z_2 saling tegak lurus)
6) $z_1 \circ z_1 = |z_1|^2$

2. Hasil Kali Silang Dua Bilangan Kompleks

Hasil kali silang dari z_1 dan z_2 didefinisikan dengan:

$$z_1 \times z_2 = = |z_1||z_2| \sin\theta = x_1y_2 - y_1x_2 = Im\{\bar{z}_1 . z_2\} = \frac{1}{2}\{\bar{z}_1 . z_2 - z_1 \bar{z}_2\}$$

Jelaslah bahwa

$$\bar{z}_1 . z_2 = (z_1 \circ z_2) + i(z_1 \times z_2) = |z_1||z_2|e^{i\theta}$$

Jika z_1 dan z_2 tak-nol, maka:

1. Suatu syarat perlu dan cukup agar z_1 dan z_2 tegak lurus adalah $z_1 \circ z_2 = 0$
2. Suatu syarat perlu dan cukup agar z_1 dan z_2 sejajar adalah $z_1 \times z_2 = 0$
3. Panjang proyeksi z_1 pada z_2 adalah $|z_1|_o |z_2|/ |z_2|$.
4. Luas jajaran genjang yang sisinya z_1 dan z_2 adalah $|z_1 \times z_2|$.

Sifat-sifat Hasil Kali Silang pada Bilangan Kompleks

Jika z_1, z_2 dan z_3 adalah vektor kompleks dan m adalah sebuah skalar, maka:

1) $z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$ (sifat komutatif)
2) $z_1 \times (z_2 + z_3) = (z_1 \times z_2) + (z_1 \times z_3)$ (sifat distributif)
3) $z_1 (mz_2) = (mz_1) \times z_2 = m(z_1 \times z_2)$ (sifat perkalian dengan skalar m)
4) $z_1 \times z_2 = 0$ (garis z_1 dan z_2 sejajar)
5) $0 \times z1 = z_1 \times 0 = 0$ (sifat identitas 0)
6) $(z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3)$ (sifat asosiatif)
7) $z_1 \times (z_2 \times z_3) = (z_1 \circ z_3) \times z_2 - (z_1 \circ z_2) \times z_3$ (sifat distributif)

LATIHAN DAN PENYELESAIAN

1. Misalkan $z_1 = 2\text{-}3i$ dan $z_2 = -5 + I$ .Tentukan $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \,.\, z_2$ dan $\frac{z_1}{z_2}$.

   Jawab: $z_1 + z_2 = (\, 2\text{-}3i\,) + (-5 + i) = -3 - 2i$.

   $z_1 - z_2 = (\, 2\text{-}3i\,) - (-5 + i) = 7 - 4i$

   $z_1 \,.\, z_2 = (\, 2\text{-}3i\,)\ (-5 + i) = -4 + 17i$

   dan

   $\frac{z_1}{z_2} =$

   $\frac{2-3i}{-5+i} = \frac{2-3i}{-5+i} . \frac{-5-i}{-5-i} =$

   $\frac{-10-2i+15i+3i^2}{25-i^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

2. Misalkan $z_1 = 2\text{-}3i$ dan $z_2 = -5 + i$.Tentukan $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \,.\, z_2$ dan $\frac{z_1}{z_2}$.

   Jawab: $z_1 + z_2 = (\, 2\text{-}3i\,) + (-5 + i) = -3 - 2i$.

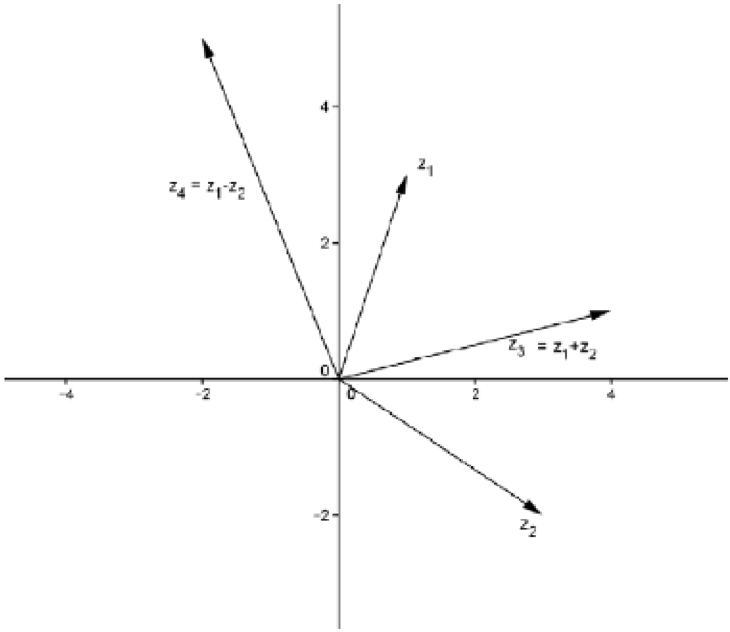
   $z_1 - z_2 = (\, 2\text{-}3i\,) - (-5 + i) = 7 - 4i$

   $z_1 \,.\, z_2 = (\, 2\text{-}3i\,)\ (-5 + i) = -4 + 17i$

   dan $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{-5+i} = \frac{2-3i}{-5+i} . \frac{-5-i}{-5-i} =$

   $\frac{-10-2i+15i+3i^2}{25-i^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

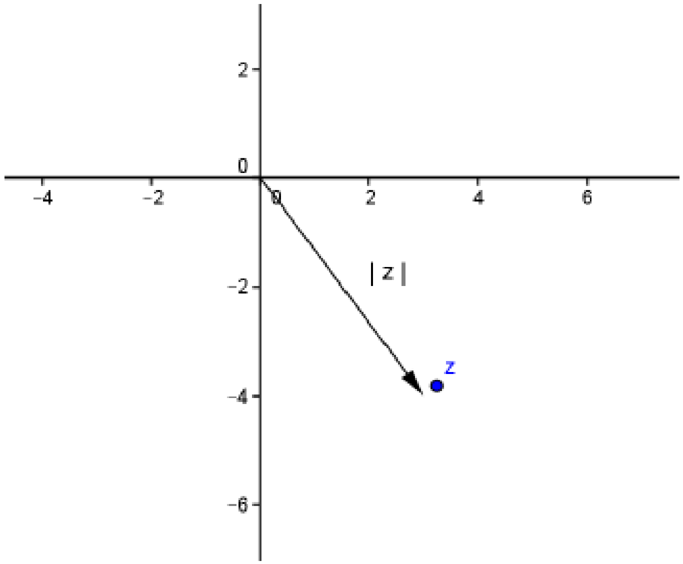
3. Misalkan $z_1 = 1{+}3i$, $z_2 = 3\text{-}2i$. Gambarkan bilangan kompleks z_1, z_2, $z_1 + z_2$ *dan* $z_1 - z_2$



4. Tentukan sekawan dari 3 + 2i dan 5i adalah –5i.
   Jawab: adalah *3 - 2i* , *–5i.*
5. Jika $z = x + iy$, buktikan bahwa $|z|^2 = z\bar{z}$
   Bukti: $|z|^2 = |\, x^2 + y^2| = (x + iy)(\, x + iy) = z\bar{z}$
6. Jika $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Buktikan bahwa: $|\, z_1\, z_2 \,| = |z_1|\, |\, z_2|$

   Bukti: $|\, z_1\, z_2 \,|^2 = (z_1\ \ z_2)\overline{(z_1 \cdot z_2)}$
   Jadi: $|\, z_1\, z_2 \,| = \ |\, z_1 \,||\, z_2 \,|$ $\quad (z_1\, \overline{z_1})(z_2\, \overline{z_2}) = |\, z_1 \,|^2 |\, z_2 \,|^2$

7. Tentukan nilai mutlak dari $z = 3 - 4i$ dan gambarkan pada bidang kompleks.
   Jawab: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$



8. Tulis bilangan kompleks berikut dalam bentuk eksponen (pangkat)

a. $z = \sqrt{3} - i$ *c.* $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

b. $z = -3 + 4i$ *d.* $z = -1 - i$

Jawab:

a. r = $\sqrt{x^2 + y^2}$ diperoleh r = 2 dan $\theta = arc \tan \frac{y}{x}$, $sehingga\ \theta = arc \tan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) =$ $\frac{5\pi}{3}$ (kuadran IV) diperoleh z = 2 $e^{5\pi/3}$

b. r = $\sqrt{x^2 + y^2}$ diperoleh r = 5 dan $\theta = arc \tan \frac{y}{x}$, sehingga $\theta = arc \tan\left(-\frac{4}{3}\right)$ (kuadran II) diperoleh z = $5e^{i\, arc \tan(-\frac{4}{3})}$

c. r = $\sqrt{x^2+y^2}$diperoleh r = 2 dan $\theta = arc\tan\frac{y}{x}$, sehingga $\theta = arc\tan\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = arc\tan(1) =$ $\pi/4$ (kuadran II)
diperoleh $z = 2e^{\left(\frac{\pi}{4}\right)i}$

d. r = $\sqrt{x^2+y^2}$ diperoleh r = √2 dan $\theta =$ $arc\tan\frac{y}{x}$, sehingga $\theta = arc\ tan\left(\frac{-1}{-1}\right) =$ $\frac{5\pi}{4}$ (kuadran III)diperoleh z = √2 $e^{5\pi i/4}$

9. Jika $z = 3\text{-}3i$, hitunglah z^3 ?
Jawab:
Seandainya kita tidak mau menggunakan dalil de Moivre pun, kita bisa mengerjakan soal ini secara 'tradisional', yaitu dengan mengalikannya satu per satu.

$z^3 = (3-3i)(3-3i)(3-3i) = 27-81i+81i^2-27i^3 = -54-54i$

Nah, bagaimana jika kita ingin mengerjakannnya dengan menggunakan dalil de Moivre?

$r = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

$\tan\theta = \frac{-3}{3} = -1$, $\theta = -\frac{1}{4}\pi$

$z^3 = r^3\text{cis}(3\theta)$

$z^3 = ((3\sqrt{2})^3\left[\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right]$

$z^3 = -54-54i$.

10. Tentukan $(-16)^{\frac{1}{4}}$!

Jawab:

Misalkan $z = (-16)^{\frac{1}{4}}$, berarti harus dicari penyele-saian-penyelesaian persamaan
$z^4 = -16$ diperoleh $z^4 = \rho^4(\cos 4\emptyset + i \sin 4\emptyset)$ -16 = 16 $(\cos \pi + \sin \pi)$,

$\rho^4(\cos 4\emptyset + i \sin 4\emptyset) = 16\ (\cos \pi + \mathrm{i}\ \sin \pi)$

Dari persamaan ini diperoleh:

$$\rho^4 = 16\rho \quad = 2$$

atau

$$4\ \emptyset = \pi + 2k\pi\emptyset = \frac{\pi + 2k\pi}{4},\ k = 0,1,2\ ,3$$

Jadi,

$$z = 2\left[cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) + \ i\ sin\ \left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)\right]$$

Keempat akar tersebut adalah

Untuk $k = 0\ ;\ z_1 = 2\ cos\ \frac{\pi}{4} + i\ sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\ i$

$k = 1;\ z_2 = 2\ cos\ \frac{3\pi}{4} + i\ sin\ \frac{3\pi}{4} = -\ \sqrt{2} + \sqrt{2}\ i$

$k = 2;\ z_3 = 2\ cos\ \frac{5\pi}{4} + i\ sin\ \frac{5\pi}{4} = -\ \sqrt{2} - \sqrt{2}\ i$

$k = 3;\ z_4 = 2\ cos\ \frac{7\pi}{4} + i\ sin\ \frac{7\pi}{4} = \ \sqrt{2} - \sqrt{2}\ i$

11. Jika $z_1 = 3+4i$ dan $z_2 = -4+3i$, tentukan:

    a. $z_1 \circ z_2$

    b. $z_1 \times z_2$

Penyelesaian:

a. $z_1 \circ z_2 = \mathrm{Re}\{(3+4i)(-4+3i)\} = \mathrm{Re}\{-24-7i\} = 24$

Atau cara lain :

$z_1 \circ z_2 = (3)(-4) + (-4)(3) = -24$

b. $z_1 \times z_2 =$

$\operatorname{Im}\{\bar{z}_1 z_2\} = \operatorname{Im}\{(3+4i)(-4+3i)\} = \operatorname{Im}\{-24-7i\} = -7$

Atau cara lain :

$z_1 \times z_2 = (3)(3) - (-4)(-4) = -7$

12. Dari soal no. 10, carilah sudut antara z_1 dan z_2

Penyelesaian:

Dengan menggunakan rumus $\cos\theta = \dfrac{z_1 \circ z_2}{|z_1||z_2|}$, diperoleh:

$$\cos\theta = \frac{z_1 \circ z_2}{|z_1||z_2|} = \frac{-24}{|3-4i||-4+3i|} = \frac{-24}{25} = -0{,}96$$

sehingga:

$\theta = \arccos(-0{,}96) = 16^o 16'$ (hasil pendekatan)

13. Tulis $\sqrt{1+2i}$ dalam bentuk bilangan kompleks $x + iy$

Penyelesaian: $\sqrt{1+2i} = x + iy$

$$1 + 2i = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 = 2ixy$$

Diperoleh $x^2 - y^2 = 1$ dan $2xy = 2 \Rightarrow xy = 1$

Dengan menggunakan metode eliminasi dan substitusi diperoleh: x $= \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ dan y $= \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ sehingga dapat ditulis $\sqrt{1+2i} = \mathrm{x} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

14. Dengan menggunakan rumus Euler, tunjukkan bahwa:

$$\cos^2\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta}}{4} = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta),$$

$$\sin^2\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2i\theta}-2+e^{-2i\theta}}{-4} = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta).$$

Penyelesaian:

Rumus Euler $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$

Sehingga:

$$cos^2\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta}}{4} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$$

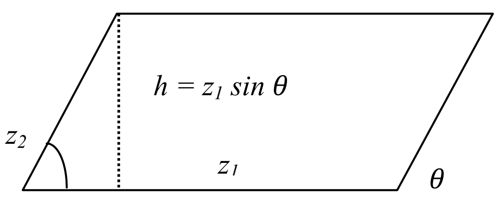
$$cos^2\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2i\theta}-2+e^{-2i\theta}}{-4}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{e^{2i\theta}-e^{-2i\theta}}{2i}\right) = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$

SOAL-SOAL

1. Diketahui: $z_1 = 4 + i$ dan $z_2 = 5 - 4i$. Tentukan $z_1 + z_2$ dan $z_2 z_1$!
2. Diketahui: $z_1 = -2 - i$; $z_2 = 3 + 4i$; dan $z_3 = 4 + 5i$
   a. Apakah $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$?
   b. Apakah $(z_1 z_2)z_3 = z_1 (z_2 z_3)$?
3. Diketahui: $z_1 = 3 + 2i$; $z_2 = 1 + i$; dan $z_3 = 4 + 2i$. Tentukan $(z_1 . z_2) + z_3$
4. Tentukan nilai a dan b. jika diketahui $(a+b) + i(a-b) = (3+2i)^2 + i(2-3i)$
5. Jika diketahui: $z_1 = 3+2i$ dan $z_2 = -2+7i$. Tentukan nilai dari $z_1 + z_2$

6. Sederhanakan bentuk $z = \frac{2}{i} - \frac{5i+4}{2-i}$
7. Diketahui: z = $6i-1$, tentukan $\frac{\bar{z}}{z}$ dan Re $\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)$
8. Jika $z_1=4-3i$ dan $z_2=2+11i$, tentukan nilai $|z_1 - z_2|$
9. Tentukan bentuk polar dan eksponen dari
   $z = -\sqrt{6} + i\sqrt{2}$
10. Buatlah grafik bilangan kompleks $z = 4 + 6i$
11. Tentukan daerah penyelesaian dari $|z + 2i| \leq 1$ pada bidang kompleks
12. Gambarkan $2z_1 - z_3$ jika diketahui $z_1 = 3 - 4i$; dan $z_3 = 4 + 5i$
13. Tentukan akar kuadrat dari $-15-8i$
14. Hitung $(1 + i\sqrt{3})^{-10}$ dan $z = (-1)^{1/3}$
15. Jika $z_1 = 3 - 4i$ dan $z_2 = -4 + 3i$.
    Tentukan :
    a. $z_{1\,0}\, z_2$
    b. $z_1 \, x \, z_2$
16. Tentukan sudut lancip diantara vektor-vektor pada Soal 13.
17. Buktikan bahwa luas jajaran genjang di bawah ini adalah $|z_1 \, x \, z_2|$.



18. Tunjukkan bahwa $2 + i = \sqrt{5}e^{-i}tan^{-1}(\frac{1}{2})$
19. Hitunglah $(-2 + 2i)^{15}$
20. Buktikan bahwa $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

21. Tentukan akar-akar dari $5\text{-}2i$ dan $8 + 4i\sqrt{5}$
22. Buktikan bahwa:
    $\frac{\sin 4\theta}{\theta} = 8cos^3\theta - 4 = 2\ \cos 3\,\theta + 6cos\ \theta - 4$
23. Buktikan :
    a. $Re\{z_1 z_2\} = Re\{z_1\}Re\{z_2\} - Im\{z_1\}\ Im\{z_2\}$
    b. $Im\{z_1 z_2\} = Re\{z_1\}\ Im\{z_2\} - Im\{z_1\}\ Re\{z_2\}$
24. Gambarkan pertidaksamaan berikut pada bidang kompleks:
    a. $|z| > |z-1|$
    b. $|z+2| > 1 + |z-2|$
    c. $-2 < Re(z) < 0$
    d. $|z+i| \leq 2$
25. Tentukan bentuk eksponen dari bilangan kompleks z = -2√3-2i.
26. Buktikan bahwa:
    a. $\overline{\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\}} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
    b. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|\bar{z}_1|}{|\bar{z}_2|}$
27. Tulislah bentuk $\sqrt{1+\mathrm{i}}$ dalam bentuk x + iy. Dan tunjukkan bahwa: $\tan \pi/8 = \sqrt{2} - 1.$
28. Hitung z jika $z^3 = -1 + i$
29. Sederhanakan hasil dari $(5+4\boldsymbol{i})(3+7\boldsymbol{i})(2-3\boldsymbol{i})$
30. Jika $z = 6\ e^{\pi i/3}$, hitunglah $\left|e^{iz}\right|$
31. Jika $z = x + iy$, buktikan bahwa $|x| + |y| \leq \sqrt{2}\,|x + iy|$
32. Tulis bilangan kompleks berikut dalam bentuk x+ iy

    (i) $(1+3i)+(5+7i)$, (ii) $(1+3i)-(5+7i)$, (iii) $(1+3i)(5+7i)$,

    (iv) $\frac{1+3i}{5+7i}$, (v) $\sqrt{3+4i}$, (vi) $\log(1+i)$.

33. Uraikan bentuk $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$ ke dalam bentuk $\cos 3\theta,\ \sin 3\theta$ dan tunjukkan bahwa: $\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta,\ \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\, d\theta.$

34. Dengan menggunakan soal no.33, hitunglah:
    $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$

    $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$

35. Tentukan argument dari bilangan kompleks:
    a. $z = 1 - i$
    b. $z = -\pi - \pi i$

- oOo -

BAB 2
FUNGSI, LIMIT DAN KEKONTINUAN

Sebelum membahas pengertian fungsi kompleks, ada beberapa konsep dasar yang perlu diketahui, yaitu pendahuluan dari topologi yang menyangkut topik-topik berikut:

1. Himpunan: koleksi titik-titik pada bidang Z. Operasi pada himpunan yaitu gabungan, irisan, penjumlahan dan pengurangan beserta sifat-sifatnya.
   a. Himpunan tertutup (*closed sets*). Suatu himpunan S dikatakan tertutup jika S memuat semua batasnya.
   b. Himpunan terbatas (*bounded sets*). Suatu himpunan S dinamakan terbatas jika kita dapat menentukan suatu konstanta M sehingga $|z| < M$ untuk setiap titik z dalam S. Suatu himpunan tak terbatas adalah himpunan yang tidak memiliki batas. Suatu himpunan yang terbatas dan tertutup dinamakan kompak.
   c. Titik-dalam, titik-luar dan titik-batas (*interior, exterior and boundary points*). Suatu titik z_0 dinamakan suatu titik-dalam dari auatu himpunan S jika kita dapat menentukan suatu lingkungan δ dari z_0 yang semua titiknya termasuk pada S, maka z_0 memuat titik di S dan juga titik di luar S, karena itu z_0 dinamakan titik-batas. Jika suatu titik bukan suatu titik-dalam atau titik-batas dari suatu himpunan S, maka titik ini dinamakan titik-luar dari S.

d. Himpunan terbuka (*open sets*). Himpunan terbuka adalah suatu himpunan yang hanya terdiri dari titik-dalam. Sebagai contoh, himpunan titik z sehingga $|z| < 1$ adalah suatu himpunan terbuka.
e. Himpunan tersambung (*conected* sets). Suatu himpunan terbuka S dikatakan tersambung jika untuk setiap dua titik di himpunan tersebut dapat dihubungkan oleh suatu lintasan berbentuk ruas garis lurus (yaitu lintasan segi banyak) yang semua titiknya terletak di dalam S.
f. Daerah terbuka atau domain *(open regions or domains*). Suatu himpunan terbuka tersambung dinamakan suatu daerah terbuka atau *domain.*
g. Penutup (*closure*) suatu himpunan (*closure of a set*). Jika suatu himpunan *S* kita gabungkan semua titik limitnya, maka himpunan baru yang terbentuk dinamakan penutup himpunan S dan merupakan suatu himpunan S dan merupakan suatu himpunan tertutup.
h. Daerah tertutup (*close regions*). Penutup suatu daerah terbuka atau domain dinamakan suatu daerah tertutup.
i. Daerah (*regions*). Jika pada suatu daerah terbuka atau domain kita gabungkan beberapa, semua atau tidak sama sekali titik limitnya, maka kita memperoleh suatu himpunan yang dinamakan daerah. Jika semua titik limitnya, maka kita memperoleh suatu himpunan yang dinamakan daerah. Jika semua limitnya digabungkan, maka daerahnya tertutup, dan jika digabungkan sama sekali, maka daerahnya terbuka.
j. Gabungan dan irisan pada himpunan *(union and intersection of sets*). Suatu himpunan yang memuat semua titik pada himpuana S_1 dan S_2 atau pada

keduanya dinamakan gabungan dari S_1 dan S_2*;* dan dinyatakan dengan S_1+S_2; S_1 S_2. Suatu himpunan yang memuat semua titik pada kedua himpunan S_1 dan S_2 dinamakan irisan dari S_1 dan S_2, dan dinyatakan dengan S_1 dan S_2.

k. Komplemen suatu himpunan *(complement of a set).* Suatu himpunan yang memuat semua titik yang tidak termasuk di S dinamakan komplemen dari S dan dinyatakan dengan S^c.

   Contoh:

   $H = \{z \mid Im(z) > 1\}$, maka $H^c = \{ z \mid Im(z) \leq 1\}$,

   $I = \{ z \mid 2 < |z| \leq 3\}$, maka $I^c = \{ z \mid | z | \geq 2, |z| > 3 \}$

l. Himpunan nol (kosong) dan himpunan bagian (*null sets and subset*). Tepat sekali untuk memandang suatu himpunan yang tidak memuat satu titik pun. Himpunan ini namakan himpunan nol (kosong) dan dinyatakan dengan Θ. Jika dua himpunan S_1 dan S_2 tidak memiliki unsur persekutuan (yang dalam kasus ini dinamakan lepas atau himpunan saling terasing), maka kita dapat menuliskan hal ini dengan $S_1 \cap S_2 = \Theta$. Suatu himpunan yang dibentuk dengan memilih beberapa, semua atau tidak sama sekali titik pada himpunan S dinamakan bagian dari S. Jika kita menghilangkan kasus di mana semua titik dari S dapat dipilih, maka himpunan yang terbentuk dinamakan himpunan bagian sejati dari S.

m. Himpunan terbilang dan tak terbilang (*countability and uncountability of a set*). Jika anggota atau unsur suatu himpunan dapat dikaitkan satu-kesatu dengan himpunan bilangan asli 1, 2, 3, ..., maka himpunan tersebut dinamakan terbilang dalam hal lain dinamakan tak-terbilang.

Berikut ini adalah dua teorema penting pada himpunan titik.

i) Teorema Bolzano-Weierstrass. Setiap himpunan terbatas tak terhingga memiliki paling sedikit satu titik limit.

ii) Teorema Heine-Borel. Misalkan S suatu himpunan kompak, yang setiap titiknya termuat dalam satu atau lebih himpunan-himpunan terbuka A1, A2, ..., (yang kemudian dikatakan cover (selubung) dari S). Maka terdapat sejumlah berhingga dari himpunan A1,A2, ..., yang menyelubungi S.

2. a. Lingkungan z_0 : himpunan semua titik z yang terletak dalam lingkaran yang berpusat di z_0 berjari-jari r, $r > 0$. Ditulis $N(z_0, r)$ atau $|z-z_0| < r$

b. Lingkungan tanpa z_0: himpunan semua titik $z \neq z_0$ yang terletak di dalam lingkaran yang berpusat di z_0, berjari-jari r, $r > 0$. Ditulis $N^*(z_0,r)$ atau $0 < |z-z_0| < r$

Contoh: $N(i,1)$atau$|z-i| < 1$dan $N^*(0,\varepsilon)$atau$0 < |z| < \varepsilon$

c. Titik limit: Titik z_0 disebut titik dari himpunan S jika untuk setiap $N^*(z_0, \delta)$ maka $S \cap N^*(z_0, \delta) \neq 0$

d. Titik batas: Titik z_0 disebut titik batas dari himpunan S jika setiap $N^*(z_0, \delta)$ memuat suatu titik di S dan memuat suatu titik yang tidak di S.

A. Fungsi Kompleks

Fungsi kompleks definisinya identik dengan fungsi real satu peubah $y = f(x)$. Namun ada penggantian lambang peubah bebas x oleh z dan peubah tak bebas y oleh w. Dengan demikian, maka fungsi kompleks tersebut dapat ditulis sebagai $w = f(z)$, di mana z pada himpunan di bidang kompleks.

Definisi 1

Misalkan D himpunan titik pada bidang z. Fungsi kompleks f adalah suatu aturan yang memasangkan titik z anggota D dengan satu dan hanya satu titik w pada bidang w, yaitu (z,w) fungsi tersebut ditulis $w = f(z)$.

Himpunan D disebut domain dari f, dinyatakan oleh Df dan $f(z)$ disebut *range* dari f dinyatakan oleh Rf, yaitu himpunan $f(z)$ untuk setiap z anggota D.

Misalkan $w = u + iv$ adalah nilai fungsi f di $z = x + iy$, sehingga

$$\boldsymbol{w = f(z) = f(x+iy) = u + iv = (x,y) + iv(x,y).}$$

Jika koordinat polar r dan θ pada x dan y digunakan, maka:

$$\boldsymbol{u + iv = f(re^{i\theta}),}$$

di mana $w = u + iv$ dan $z = re^{i\theta}$. Sehingga $f(z)$ dapat ditulis

$$\boldsymbol{f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta).}$$

Contoh-contoh fungsi kompleks seperti berikut:

- $w = z^2+10$, fungsi dengan domain seluruhnya di bidang z
- $w = z^{-1}$, fungsi dengan semua titik pada bidang z, kecuali di $z = 0$
- $w = /z/ + i\,\bar{z} - z^{-2}$, fungsi dengan semua titik pada bidang z, kecuali di $z = 0$
- $w = 1/(z^2+1)$, semua titik pada bidang z, kecuali di $z = \pm i$

Jenis-jenis Fungsi Kompleks

a. Fungsi suku banyak

Bentuk umum:

$$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = P(z)$$

Di mana $a_0 \neq 0,\ a_1,\ \ldots\ ,\ a_n$ konstanta kompleks dan n bilangan bulat positif yang disebut derajat suku banyak $P(z)$.

Transformasi: $w = az - b$, dinamakan transformasi linier.

Contoh: $w = (1+i)z^3 - 3i\,z^2 + 2-2i)\,z + (4-2i)$

b. Fungsi pangkat (eksponen)

$$w = e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

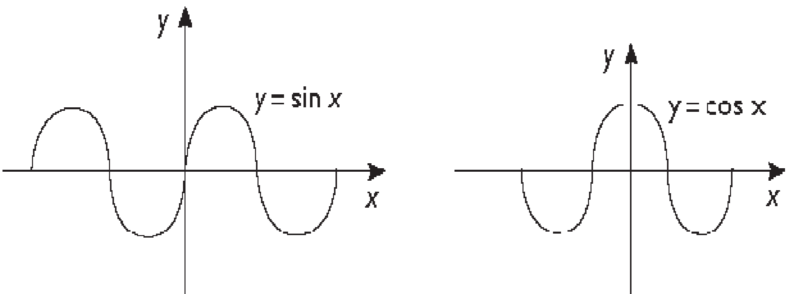
di mana $e=2,71828\ldots$ adalah dasar logaritma natural (asli)

Jika bilangan riil positif, maka kita mendefenisikan $a^2 = e^{2\ln a}$, di mana $\ln a$ adalah logaritma natural (asli) dari a.

c. Fungsi trigonometri

Dari rumus Euler, diperoleh fungsi trigonometri, yaitu :

$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ *dan* $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$



Gambar 1.
Grafik fungsi *sin x* dan *cos x* pada diagram Cartesius

Dengan mengubah fungsi trigonometri dalam bentuk seperti di atas dan dengan memanfaatkan fungsi-fungsi eksponen, maka penyederhanaan dalam bentuk standar bilangan kompleks dapat dilakukan.

Sifat fungsi trigonometri riil juga berlaku untuk fungsi trigonometri kompleks. Sebagai contoh, kita mempunyai sifat:

Rumus identitas fungsi trigonometri:	<u>Sudut negatif</u>:
$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$	$\sin(-z) = -\sin z$
$1 + \tan^2 z = \sec^2 z$	$\cos(-z) = \cos z$
$1 + \cot^2 z = \csc^2 z$	$\tan(-z) = -\tan z$

d. Fungsi invers trigonometri

Jika $z = \sin w$, maka $w = \sin^{-1} z$ disebut invers $\sin z$ atau *arc(sin z).* Dengan cara yang sama kita definisikan $\cos^{-1} z$, $\tan^{-1} z$ dan lainnya. Dari rumus trigonometri, diperoleh:

a. $\sin^{-1} z = \frac{1}{i} \ln\{iz + \sqrt{1 - z^2}\}$

b. $\cos^{-1} z = \frac{1}{i} \ln\{iz + \sqrt{z^2 - 1}\}$

c. $\tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \ln\left\{\frac{1+iz}{1-iz}\right\}$

d. $\csc^{-1} z = \frac{1}{i} \ln\left\{\frac{i+\sqrt{z^2-1}}{z}\right\}$

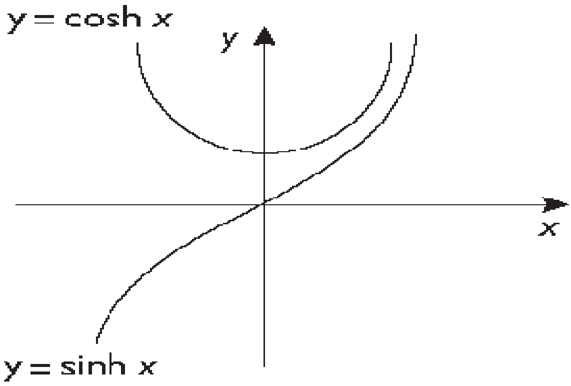
e. $\sec^{-1} z = \frac{1}{i} \ln\left\{\frac{i+\sqrt{\sqrt{1-z^2}}}{z}\right\}$

f. $\cot^{-1} z = \frac{1}{2i} \ln\left\{\frac{z+i}{z-i}\right\}$

e. Fungsi hiperbolik

Fungsi hiperbolik didefinisikan sebagai :

$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ dan $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$



Gambar 2.
Grafik fungsi *sinh x* dan *cosh x* pada diagram Cartesius

Pada fungsi hiperbolik berlaku:

sinh(-z) = – sinhz
cosh(-z) = coshz
tanh(-z) = – tanhz

Hubungan antara fungsi trigonometri dan fungsi hiperbolik:

sin iz = i sin hz	*cosiz = coshz*	*tan iz = i tan hz*
sinh iz = i sin z	*cosh iz = cos z*	*tanh iz = i tan z*

Contoh:

Cari semua solusi untuk persamaan *sinh(z) = 0*

Jawab:

Karena $sinhz = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}) = 0$, maka $\frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}) = 0$,

$\frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}) = 0 \rightarrow e^{z} - e^{-z} = 0 \rightarrow e^{2z} - 1 = 0$ maka $e^{2z} = 1$

$2z = 0 \rightarrow z = 0$

f. Fungsi Invers hiperbolik

Misalkan $z = \sinh w$, maka $w = \sinh^{-1} z$ disebut fungsi invers *sin* hiperbolik dari z. Dengan cara yang sama $\cosh^{-1} z$, $\tanh^{-1} z$ dan lainnya.

Dari rumus trigonometri diperoleh:

a. $\sinh^{-1} z = \ln\left\{z + \sqrt{z^2 + 1}\right\}$

b. $\cosh^{-1} z = \ln\left\{z + \sqrt{z^2 - 1}\right\}$

c. $\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln \left\{\frac{1+z}{1-z}\right\}$

d. $\mathrm{csch}^{-1} z = \ln \left\{\frac{i + \sqrt{z^2+1}}{z}\right\}$

e. $\mathrm{sech}^{-1} z = \ln \left\{\frac{i + \sqrt{\sqrt{1-z^2}}}{z}\right\}$

f. $\coth^{-1} z = \frac{1}{2} \ln \left\{\frac{z+1}{z-1}\right\}$

g. Fungsi logaritma

Logaritma asli (natural) untuk $z = x + iy = \ln z$ merupakan kebalikan dari fungsi eksponen.

$$w = \ln z \leftrightarrow e^w = z\ ,\ z \neq 0$$

Misalkan $z = re^{i\theta}$, maka $\ln z = \ln (re^{i\theta}) = \ln r + i\theta = \ln |z| + i \arg(z)$

Nilai utama: $\ln z = \ln |z| + i \arg(z) = \ln (\sqrt{x^2 + y^2}) + i \arg (x+iy)$

Jadi: jika $w = u + iv$ dan $z = re^{i\theta}$
maka $e^w = e^{u + iv} = e^u e^{iv} = re^{i\theta}$

Sifat-sifat logaritma:

$$\ln (z_1 z_2) = \ln (z_1) + \ln (z_2)$$

$$\ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2$$

Contoh:

Tentukan penyelesaian dari $ln\ z = -\frac{\pi i}{2}$

Jawab:

$ln\ z = = ln\ r + i\theta = -\frac{\pi i}{2}$, $ln\ r = 0$, $r = 1$ dan $\theta = -\frac{\pi}{2}$

Maka $z = re^{i\theta} = e^{-\frac{\pi i}{2}} = -\ i$

B. Limit Fungsi Kompleks

Definisi 2

LimitFungsi Secara Intuisi

Apabila titik z bergerak mendekati titik z_0 pada daerah D dan nilai *f(z)* bergerak mendekati suatu nilai tertentu yaitu w_0, maka dikatakan limit *f(z)* adalah *z* menuju z_0, dapat ditulis sebagai berikut:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

Definisi 3

LimitFungsi Secara Formal

Misal $w = f(z)$ terdefinisi pada daerah D limit *f(z)* adalah w_0 untuk $z \to z_0$ ditulis $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ jika $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0 \ni$ $\mid f(z) - w_0 \mid < \varepsilon$ apabila $0 < z - z_0 < \delta$

Catatan:

1. Titik z_0 tidak perlu termasuk domain fungsi f
2. Peubah z menuju z_0 melalui sembarang lengkungan K, artinya z menuju z_0 dari segala arah

3. Apabila z menuju z_0 melalui dua lengkungan yang berbeda saja, mengakibatkan *f(z)* menuju dua nilai yang berbeda, maka limit fungsi f tersebut tidak ada untuk z menuju z_0.

Contoh:

1. Buktikan bahwa $\lim_{z \to z_0} f(z) = z_0$ apabila $f(z) = z$

   Bukti :

   Harus ditunjukkan untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ (biasanya tergantung ε) sehingga $|f(z) - z_o| < \varepsilon$ apabila $|z - z_o| < \delta$. Jelas ada $\delta = \varepsilon$, apabila $|z - z_o| < \delta$, maka $|f(z) - z_o| < \varepsilon$, berarti

$$\lim_{z \to z_o} f(z) = z_o$$

2. Buktikan bahwa $\lim_{z \to z_o} z^2 = {z_o}^2$

   Bukti :

   Untuk setiap $\varepsilon > \emptyset$ akan dicari δ sehingga

   $|z^2 - {z_o}^2| < \varepsilon$ apabila $|z - z_o| < \delta$

   Jika $\delta \leq 1$, maka $0 < |z - z_o| < \delta$ mengakibatkan

$$\begin{aligned} |z^2 - z_o^2| &= |z - z_o|\,|z + z_o| < \delta|z + z_o| \\ &= \delta|z - z_o + 2z_o| \\ &< \delta\{\ |z - z_o| + 2\,|z_o|\ \} \\ &< \delta(\ |1 + 2|z_o|\ ) \end{aligned}$$

   Apabila diambil δ minimum antara 1 dan $\frac{\varepsilon}{(1+2|z_o|)}$

   Maka $|z^2 - z_o^2| < \varepsilon$apabila$|z - z_o| < \delta$

   Berarti $\lim_{z \to z_o} z^2 = {z_o}^2$

Pada bagian berikut, kita akan membahas beberapa teorema yang merupakan sifat-sifat dasar dari limit fungsi kompleks.

Teorema 1

Jika fungsi f mempunyai limit untuk z menuju z_o, maka nilai limitnya tunggal.

Bukti

Dengan kontradiksi. Andaikan f mempunyai dua nilai limit

$\lim_{z \to z_o} f(z) = w_1$dan $\lim_{z \to z_o} f(z) = w_2;\ w_1 \neq w_2$

Ambil bilangan positif ε tersebut ada $\delta > 0$ sehingga

$$|f(z) - w_1| < \varepsilon \text{dan} |f(z) - w_2| < \varepsilon$$

Apabila $0 < |z - z_o| < \delta$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga

$$\begin{aligned} |w_1 - w_2| &= |w_1 - f(z) + f(z) - w_2 \\ &\leq |w_1 - f(z)| + |f(z) - w_2| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &= ½|w_1 - w_2| + ½|w_1 - w_2| \\ &= |w_1 - w_2| \end{aligned}$$

Terakhir diperoleh$|w_1 - w_2| < |w_1 - w_2|$, hal ini tidak mungkin, berarti pengandaian salah. Jadi limit f harus tunggal.

Teorema 2

Misalkan *z = (x,y) = x + yi* dan f*(z) = u(x,y) + i v(x,y)* dengan domain D.

Titik
$z_o = (x_o, y_o) =$
$x_o + y_o i$ di dalam D atau pada batas D
Maka
$\lim_{z \to z_o} f(z) =$
$u_o + iv_o$ jika dan hanya jika $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_o)} u(x,y) =$
v_o dan $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} u(x,y) =$
v_o dan $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} v(x,y) = v_o$

Bukti

a. Misalkan
$\lim_{z\to z_0} f(x)=u_o+ iv_o$, ini berarti untuk setiap $\varepsilon>0$, apabila $0<|z-z_o|<\beta$ maka $|f(z)-(u_o+ iv_o)|<\varepsilon$
$$|u(x,y) - u_o + i(v(x,y) - v_o) < \varepsilon$$
, kemudian didapat
$$|u(x,y) - u_o| < |u(x,y) - u_o + i(v(x,y) - v_o)| < \varepsilon$$
$|v(x,y)-v_o|<|u(x,y)-u_o+ i(v(x,y)-v_o)|\varepsilon$
ambil $\delta = \frac{\beta}{2}$
Jika $0 < |x - x_o| < \delta, 0 < |y - y_o| < \delta,$ maka
$$\emptyset < |z - z_o| = |x + yi - (x_o + y_{oi})| = |(x - x_o) + i(y - y_o| \leq |x - x_o| + |y - y_o| < \delta + \delta = \beta$$

Kesimpulan dari uraian di atas adalah
jika $0 < |x - x_o| < \delta, 0 < |y - y_o| < \delta$
Maka $|u(x,y) - u_o| < \varepsilon$dan $|v(x,y) - v_o| < \varepsilon$
Hal ini berarti $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} u(x,y) = u_o$ dan
$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} v(x,y) = v_o$$

b. Misalkan
$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} u(x,y) =$
u_o dan $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} v(x,y) = v_o$

Ini berarti untuk setiap $\varepsilon > \emptyset$ ada $\delta_1 > \emptyset$ dan $\delta_2 > \emptyset$ sehingga,
$|u(x,y) - u_0| < \varepsilon/2$, apabila $|z - z_o| < \delta_1$
$|u(x,y) - v_0| < \varepsilon/2$, apabila $|z - z_0| < \delta_2$
Pilih δ bilangan terkecil di antara δ_1 dan δ_2 , maka

$$|f(z) - (u_0 + i\,v_0)| = |u\,(x,y) - u_o + i\,(v(x,y) - v_0)| \leq$$

$$|u(x,y) - u_0| + |v(x,y) - v_0| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Jadi $|f(z) - (u_0 + iv_0)| < \varepsilon$ apabila $|z - z_0| < \delta$, yang berarti :

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = u_0 + iv_0$$

Sifat –Sifat Limit Fungsi Kompleks

Misalkan $\lim_{z\to z_0} f(z) = A$ dan $\lim_{z\to z_0} g(z) = B$,dan c konstanta, maka berlaku:

1. $\lim_{z\to z_0} c\,[f(z)] = c \lim_{z\to z_0} f(z) = cA$
2. $\lim_{z\to z_0}[f(z)A + g(z)] =$
   $\lim_{z\to z_0} f(z) + \lim_{z\to z_0} g(z) = A + B$
3. $\lim_{z\to z_0}[f(z)A - g(z)] =$
   $\lim_{z\to z_0} f(z) - \lim_{z\to z_0} g(z) = A - B$

4. $\lim_{z\to z_0}[f(z)\,.\,g(z)] =$
$$\lim_{z\to z_0} f(z)\,.\lim_{z\to z_0} g(z) = AB$$
5. $\lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{\lim_{z\to z_0} f(z)}{\lim_{z\to z_0} g(z)} = \frac{A}{B}\ , jika\ B \neq 0$

Contoh:

Buktikan sifat 2 dari sifat-sifat limit fungsi kompleks

Sifat 2:

$$lim_{z\to z_0}[f(z)A + g(z)] = lim_{z\to z_0} f(z) + lim_{z\to z_0} g(z) = A + B$$

Menurut definisi limit, ambil ε > 0 sembarang maka dapat ditentukan δ > 0 ∃

$|f(z) + g(z) - (A+B)| < \varepsilon$ bila $0 < z - z_0 < \delta$

$|(f(z) + g(z)) - (A+B)| = |f(z) - A)| + |(g(z) - B)|$

$\leq |f(z) - A| + |(g(z) - B)|$

$|f(z) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ bila $0 < z - z_0 < \delta_1$

$|g(z) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$ bila $0 < z - z_0 < \delta_2$

$[f(z) + g(z)] - (A + B) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ bila $0 < z - z_0 < \delta$

Dengan δ diambil dari harga terkecil, jadi terdapat δ > 0 sehingga

$(f(z) + g(z)) - (A+B) < \varepsilon$ untuk $0 < z - z_0 < \delta$ yang berarti lim $\{f(z) + g(z)\} = A + B$

Ketakberhinggaan

Melalui transformasi $w = 1/z$ titik $z = 0$ dipetakan ke dalam $w = \infty$, yang dinamakan titik di tak hingga pada bidang- w. Dengan cara yang sama, kita menyatakan z = ∞ sebagai titik di tak hingga pada bidang –z. Untuk mengamati perilaku f(z) di z = ∞, cukup dengan memisalkan z = 1/w dan menguji perilaku f (1/w) di w = 0.

Definisi 4

Kita mengatakan bahwa $\lim_{z\to\infty} f(z) = l$ atau *f(z)* mendekati l untuk z mendekati tak berhingga, jika untuk setiap $\epsilon > 0$ kita dapat menentukan M > 0 sehingga $|f(z) - l| < \epsilon$ bilamana $|z| >$ M.

Kita mengatakan bahwa $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ atau f (z) mendekati tak berhingga untuk z mendekati z_0, jika untuk setiap N > 0 kita dapat menentukan $\delta > 0$ sehingga $|f(z)| >$ N bilamana 0 $0 < |z - z_0| < \delta$.

C. KekontinuanFungsi

Definisi 5

Misalkan fungsi $f(z)$ terdefinisi di D pada bidang- z dan titik z_0 terletak pada interior D fungsi $f(z)$ dikatakan kontinu di z_0 apabila

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Secara terinci syarat fungsi $f(z)$ kontinu di z_0 adalah

1. $f(_0)$ ada
2. $\lim_{z\to z_0} f(z)$ ada
3. $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(_0)$

Fungsi $f(z)$ dikatakan kontinu pada suatu daerah R apabila $f(z)$ kontinu di setiap titik pada daerah R tersebut. Persyaratan ini mengandung arti bahwa fungsi hanya mungkin kontinu pada titik dalam daerah definisinya.

Fungsi *f(z)* disebut diskontinu di titik $z = z_0$ jika salah satu atau lebih persyaratan kontinu tidak dipenuhi. Berbagai corak ketidakkontinuan diterangkan oleh beberapa contoh sebagai berikut:

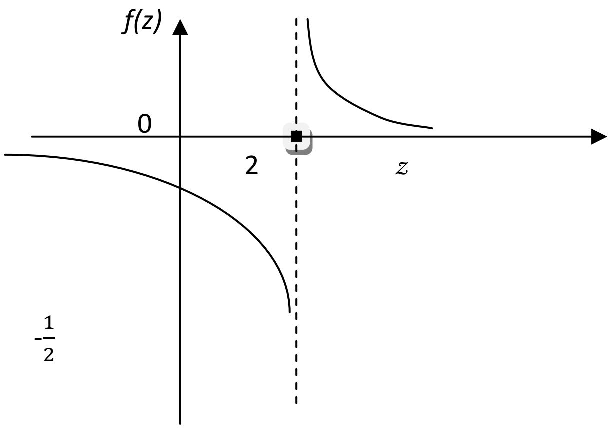
Contoh: $f(z) = \frac{1}{z-2}$ diskontinu di z = *2* karena

$$\lim_{z\to 2} f(z) = \lim_{z\to 2} \frac{1}{z-2}$$
$$= \frac{1}{2-2}$$
$$= \frac{1}{0}$$

f (2) tidak dapat didefinisikan (penyebut 0)

$\lim_{z\to 2} \frac{1}{z-2}$ tak ada

Secara geometris dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



Gambar 1 Fungsi $f(z) = \frac{1}{z-2}$ tidak kontinu di z = 2

Fungsi kontinu untuk semua nilai z kecuali untuk *z = 2.* Ketidakkontinuan ini dapat dihapuskan.

Secara implisit dari definisi kekontinuan menunjukkan bahwa jika $f(z)$ kontinu di z_0, maka $f(z)$ terdefinisi pada lingkungan N dari z_0. kekontinuan fungsi $f(z)$ di titik z_1 dalam hal z_1 titik batas D dapat didefinisikan asalkan lingkungan yang dijalani oleh menuju z_1 masih di dalam D. Dalam hal ini $f(z)$ harus terdefinisi pada lingkungan M dari z_1 yang berada di dalam D.

Sebuah fungsi yang kontinu di setiap titik dalam satu interval dikatakan kontinu dalam satu interval tersebut. Suatu fungsi *f(x)* dikatakan kontinu jika fungsi kontinu di setiap titik daerah definisi.

Teorema 3

Jika 1. $f(z) = u\,(x, y) + \,iv\,(x, y)$

2. $f(z) =$ terdefinisi di setiap titik pada daerah R

3. $z_0 = x_0 + iy_0$ titik dalam R

Maka fungsi $f(z)$ kontinu di $_0$ jika dan hanya jika $u\,(x,y)$ dan $v(x,y)$ masing-masing kontinu di (x_0, y_0)

Bukti:

Yang harus dibuktikan adalah

$$\lim_{z \to z0} f(z) = f(z_0)$$

Jika dan hanya jika $\lim_{(x,y) \to (x0,y0)} u(x, y) = u(x_0, y_0)$

dan $\lim_{(x,y) \to (x0,y0)} v(x, y) = v\,(x0, y0)$

Buktinya segera didapat sebagai akibat langsung dari teorema 2.2

Teorema 4

Misalkan $f(z)$ dan $g(z)$ kontinu di z_0 maka masing-masing fungsi

1. $f(z) + g(z)$
2. $f(z).g(z)$
3. $\frac{f(z)}{g(z)}$; $g(z_0) \neq 0$
4. $f(g(z))$; f kontinu di $g(z_0)$, kontinu di z_0

Teorema 5

Jika $f(z)$ dan $g(z)$ kontinu di $z = z_0$, maka fungsi $f(z) + g(z)$, $f(z) - g(z)$,$f(z)$ $g(z)$ dan $\frac{f(z)}{g(z)}$, juga kontinu di z_0 tetapi yang terakhir ditambah syarat hanya jika $g(z_0) \neq 0$ hasil yang lama berlaku untuk kekontinuan pada suatu daerah.

Teorema 6

Fungsi yang kontinu pada setiap daerah berhingga di antaranya adalah:

1. semua suku banyak
2. e^z
3. *sin z* dan *cos z*

Teorema 7

Jika $f(z)$ kontinu dalam suatu daerah tertutup, maka ia terbatas pada daerah tersebut; yaitu terdapat konstanta M sehingga $|f(z)| < M$ untuk semua titik z pada daerah tersebut.

Teorema 8

Jika *f(z)* kontinu dalam suatu daerah, maka bagian riil dan khayal dari *f(z)* kontinu dalam daerah tersebut.

Misal *f(z)* kontinu dalam suatu daerah, maka menurut definisinya di setiap titik z_0 dari daerah tersebut dan untuk setiap $\epsilon > 0$, kita dapat menentukan $\delta > 0$ (yang secara umum bergantung pada e dan titik khusus z_0).Sehingga $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ bilamana $|z - z_0| < \delta$. Jika kita dapat menentukan δ yang hanya bergantung dari ϵ tetapi pada titik khusus z_0, maka kita mengatakan bahwa *f(z)* kontinu seragam dalam daerah tersebut.

Pilihan lain untuk definisi ini adalah *f(z)* dikatakan kontinu seragam dalam suatu daerah jika untuk setiap $e > 0$ kita dapat menentukan $\delta > 0$ sehingga $|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$ bila $|z_1 - z_2| < \delta$ di mana z_1 dan z_2 adalah dua titik sembarang pada daerah tersebut.

Teorema 9

Jika *f(z)* kontinu dalam suatu daerah tertutup, maka ia kontinu seragam di daerah tersebut.

LATIHAN DAN PENYELESAIAN

1. Buktikan bahwa $1 - tanh^2 z = sech^2 z$

Bukti : $1 - \left\{\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}\right\}^2 = \frac{[(e^z+e^{-z})]^2 - [(e^z-e^{-z})]^2}{[(e^z+e^{-z})]^2} =$

$$\frac{4}{[(e^z + e^{-z})]^2} = \left\{\frac{2}{e^z + e^{-z}}\right\}^2 = \left\{\frac{1}{cosh^2 z}\right\} = sech^2 z$$

2. Tentukan nilai z yang memenuhi persamaan *sin z = i sinh 1*

   Jawab:

   $sin\ (x + iy) = sin\ x\ cos\ iy + cosx\ sin\ iy = i\ sinh\ 1$

   $= sin\ x\ cosh\ y + i\ \ cos\ x\ sinh = i\ sinh\ 1$

   $sin\ x\ cosh\ y = 0$ *dan* $cos\ x\ sinh\ y = sinh\ 1$

   $sin\ x = 0$, *maka* $x = k\pi k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots.$

   Maka $cos(k\pi)\ sinh\ y = 1$, maka $sinh\ y = sinh\ 1$,maka $y = 1$, diperoleh :

   $z = x + iy = k\pi + i,\ k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots.$

3. Tentukan semua solusi dari $e^z = -3 + 4i$

   Jawab: $e^x\ cos\ y = -3$ *(1)*

   $e^x\ sin\ \ y = 4$ *(2)*

   diperoleh $tan\ y = \frac{-4}{3}$ sehingga $y = 126{,}9^o = 2{,}215$

   Dari persamaan (1) diperoleh $x = ln\ 5 = 1{,}609$

   Jadi $z = 1{,}609 + 2{,}215i$

4. Hitung $\lim_{z \to i} \dfrac{z - i}{z^2 + i}$

   Jawab:

   $$\lim_{z \to i} \frac{z - i}{z^2 + i} = \lim_{z \to i} \frac{z - i}{(z - i)(z + i)}$$

   $$= \lim_{z \to i} \frac{1}{(z + i)} = \frac{1}{i + i} = \frac{1}{2i}$$

5. Hitung $\lim_{z \to z_0} \frac{z+2}{z^2-4}$, $z_0 = i$

   $$\lim_{z \to i} \frac{z+2}{z^2-4} = \lim_{z \to i} \frac{z+2}{(z+2)(z-2)}$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{z+2}{(z+2)(z-2)}$$
$$= \lim_{z\to i} \frac{1}{(z-2)}$$
$$= \frac{1}{i-2}$$

6. Hitung $\lim_{z\to i}(z^3 + z^2 + 7z + c)$
   $\lim_{z\to i}(z^3 + z^2 + 7z + c) = \lim_{z\to i} z^3 + \lim\limits_{z\to i} z^2 + \lim\limits_{z\to i} 7z + \lim\limits_{z\to i} c$
   $$= i^3 + i^2 + 7i + c$$
   $$= 6i - 1 + c$$

7. Jika $f(x) = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{y+1} i$, Buktikan $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ tidak ada
   Bukti :
   Pertama misalkan $z \to 0$ sepanjang garis real (y = 0)

   $$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,0)\to(0,0)} f(z) = \lim_{x\to 0} x^2 i = 0$$

   Kemudian apabila $z \to 0$ sepanjang garis $y = x$

   $$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,x)\to(0,0)} f(z) = \lim_{x\to \emptyset}(1 + \frac{x^2}{x+1} i = 1$$

   $$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(z) = \lim_{x\to 0} x^2 i = 0 \neq$$
   $$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(z) = \lim_{x\to \emptyset}(1 + \frac{x^2}{x+1} i = 1$$

   Terbukti bahwa $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ tidak ada

8. Misalkan $f(z) = \begin{cases} \frac{z^2+4}{z-2i} & ,z \neq 2i \\ 3+4i & ,z = 2i \end{cases}$

Apakah f kontinu pada $z = 2i$?

$\lim_{z\to 2i} f(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{z^2+4}{z-2i} = \lim_{z\to 2i} \frac{(z-2i)(z+2i)}{z-2i} =$ $\lim_{z\to 2i}(z+2i) = 4i$

$$f(2i) = 3+4i$$

Jadi $\lim_{z\to 2i} f(z) \neq f(2i), f$ tidak kontinu di $z = 2i$

Apabila $z_0 \neq 2i$ maka $f(z) = \frac{z^2+4}{z-2i} = z+2i$

$$\lim_{z\to z\circ} f(z) = \lim_{z\to z\circ} +2i = \circ +2i = f(\circ)$$

Fungsi f kontinu di setiap $z \neq 2i$

9. $f(z) \begin{cases} z^2 & ,z \neq 0, \\ 0 & ,\ z = z_0 \end{cases}$

$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} z^2 = z_0^2$, tetapi $f(z_0) = 0$,

maka

$\lim_{z\to z_0} f(z) \neq f(z_0)$, berarti $f(z)$ tidak kontinu di $z = z_0$ untuk $z_0 \neq 0$

10. Misalkan $f(z) = \frac{z^4-4}{z-2}$, apakah $f(z)$ kontinu di $z = 2$?

Jawab : $\lim_{z\to 2} f(z) = \lim_{z\to 2} \frac{z^4-4}{z-2}$

$= \frac{2^4-4}{2-2}$

$= \frac{0}{0}$(bentuk tak tentu, berarti ada limitnya)

Diperoleh :

$$\lim_{z \to 2} f(z) = \lim_{z \to 2} \frac{z^4 - 4}{z-2} = \lim_{z \to 2} \frac{(z+2)(z-2)}{(z-2)} = 4$$

$f(2) = \frac{2^4 - 4}{2-2} = = \frac{0}{0}$ (tak didefinisikan),

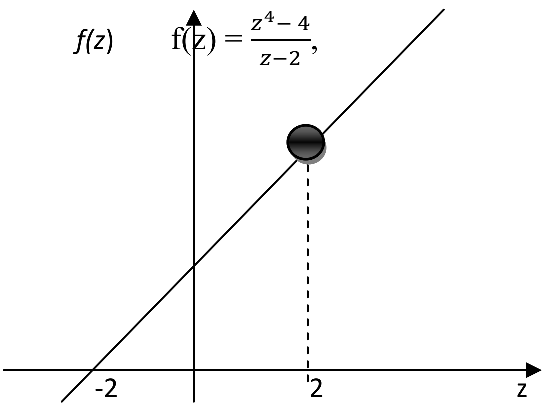
berarti $\lim_{z \to 2} f(z) \neq f(4)$. Jadi $f(z)$ diskontinu di $z = 2$

Ketidakkontinuan *) ini dapat dihapuskan dengan mendefinisikan kembali fungsi $f(z)$ yaitu

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^4 + 4}{z - 2} & , z \neq 2 \\ 4 & , z = 2 \end{cases}$$

*) menghapus ketidakkontinuan berarti menutup "lubang" yang menyebabkan ketidakkontinuan tersebut.

Dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



SOAL-SOAL

1. Tentukan nilai fungsi dari $f(z)=z^2-2z-1$, jika $z=1+2i$
2. Buktikan bahwa untuk semua $|z| = 2$ berlaku

$$2 \leq |z - 4| \leq 6.$$

3. Buktikan bahwa untuk semua $|z| = 3$ berlaku
   $2 \leq |z - 4| \leq 6.$ $\quad \frac{8}{11} \leq \left|\frac{z^2+1}{z^2+2}\right| \leq \frac{10}{7}.$
4. Buktikan bahwa $|\sin(x + iy)|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y,$
   $|\cos(x + iy)|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y.$

   untuk semua $z = x + iy$
5. Jika $z = x + iy$, nyatakan fungsi $f(z) = z^2 + 3z$ dalam bentuk $u(x, y) + iv(x, y)$
6. Tentukan hasil dari $\cos^2 z = 4$
7. Cari semua penyelesaian dari $\cos(z) = 3i$
8. Tentukan nilai dari $\ln(-5)$
9. Cari semua solusi dari $\sinh(z) = 0$
10. Tentukan nilai utama dari $(2i)^{2i}$
11. Tentukan nilai dari $\tan^{-1}(1 + i)$
12. Buktikan bahwa $\log(1-i) = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{4}\pi i$
13. Hitung $\lim_{z \to z_0} f(z)$, jika $f(z) = \frac{z^2-1}{z+1}$; $z_0 = 3 - 2i$
14. Hitung $\lim_{z \to i} \frac{z^2+1}{z^6+1}$ $\qquad \lim_{z \to z_0} \frac{z+2}{z^2-4}$, $z_0 = i$
15. Hitung $\lim_{z \to i}(z^3 + z^2 + 7z + c)$
16. Hitung $\lim_{z \to z_0} f(z)$, jika $f(z) = \frac{z^3 - 1}{z + 1}$, $z_0 = 3 - 2i$
17. Buktikan bahwa $\lim_{z \to 2i} \frac{z-2i}{z^2+4} = -\frac{i}{4}$
18. Buktikan bahwa $\lim_{z \to -2i} \frac{1}{z} = -\frac{i}{2}$
19. Selidiki kontinuitas dari $f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{jika } z \neq z_0 \\ 0 & \text{jika } z = z_0 \end{cases}$

20. Apakah $f(z) = \dfrac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i}$ kontinu pada $z = i$?

21. Buktikan bahwa $f(z) = 1/z$ tidak kontinu seragam di daerah $|z| < 1$
22. Tentukan penyelesaian dari $z^2 + (2i-3)z + 5 - i = 0$
23. Buktikan bahwa $f(z) = z^2$ kontinupada $z = z_0$
24. Tunjukkan bahwa $\left|\tanh \pi(1+i)/4\right| = 1$
25. Buktikan bahwa $f(z) = 3z - 2$ kontinu seragam pada daerah $|z| \leq 10$
26. Hitunglah nilai dari $\cosh(\pi i/2)$
27. Gunakan definisi limit untuk menunjukkan bahwa $\lim_{z \to z_0} (az + b) = az_0 + b$
28. Tunjukkan bahwa :
    a. $\lim_{z \to i} \dfrac{iz^3}{z + i}$
    b. $\lim_{z \to 1-i} x + i(2x + y)$
    Limitnya tidak ada
29. Buktikan bahwa $\lim_{z \to \infty} \dfrac{z^3 - 3z + 2}{z^4 + z^2 - 3z + 5} = 0$

30. Tentukan konstanta A dan B dari fungsi:

$$f(z) = \frac{3z + 1}{(z + 2)(z - 3)} = \frac{A}{z + 2} + \frac{B}{z - 3}.$$

- oOo -

BAB 3
TURUNAN FUNGSI KOMPLEKS

A. Turunan Fungsi

Definisi 1

Jika *f(z*) adalah fungsi yang kontinu dalam daerah D di bidang *z*, maka turunan dari *f(z)* adalah

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to o} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \text{asalkan limitnya ada}$$

B. Sifat-Sifat Turunan Fungsi

Misalkan *f(z), g(z),* dan *h(z)* adalah fungsi analitik di *z* maka berlaku :

1. $\frac{d}{dz}\{c.f(z)\} = c\frac{d}{dz}f(z) =$

   $cf'(z)$ (di mana c adalah konstan)

2. $\frac{d}{dz}\{f(z) + g(z)\} = \frac{d}{dz}f(z) + \frac{d}{dz}g(z) = f'(z) + g'(z)$

3. $\frac{d}{dz}\{f(z) - g(z) = \frac{d}{dz}f(z) - \frac{d}{dz}g(z) = f'(z) - g'(z)$

4. $\frac{d}{dz}\{f(z)g(z)\} = f(z)\frac{d}{dz}g(z) + g(z)\frac{d}{dz}f(z) =$

   $f(z)g'(z) + g(z)f'(z)$

5. $\frac{d}{dz}\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\} = \frac{g(z)\frac{d}{dz}f(z) - f(z)\frac{d}{dz}g(z)}{[g(z)]^2} =$

   $\frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2} jika\ g(z) \neq 0$

6. Jika *w=f(u), u=g(v)* dan *v=h(z)* maka :

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dz}$$

7. Jika *w=f(z),* maka $z=f^{-1}(w)$ sehingga :

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{dw}{dz}}$$

8. Jika *z=f(t)* dan *w=g(t), t* adalah parameter maka:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{{dw}/{dz}}{{dz}/{dt}}$$

C. Jenis-Jenis Turunan Fungsi

1. Turunan Fungsi Elementer

Misalkan *c* konstanta kompleks dan *f(z)* suatu fungsi kompleks yang kontinu di suatu titik pada *D*, maka berlaku

a. $\frac{d}{dz}(c) = 0$

Bukti :

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to o} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to o} \frac{c - c}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} 0 = 0 \text{ (terbukti)}$$

b. $\frac{d}{dz}(kz) = k \text{ f}'(\text{z})$

Bukti :

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to o} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to o} \frac{k.f(z + \Delta z) - k.f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to o} k \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= k \lim_{\Delta z \to o} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad = k\, f'(z)\ (terbukti)$$

c. $\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$

Bukti :

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to o} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} f'(z)$$

$$= \lim_{\Delta z \to o} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^n + nz^{n-1}\Delta z + \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2}\Delta z^2 + \cdots + nz\Delta z^{n-1} + \Delta z^n - z^n}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z \left[nz^{n-1}\Delta z + \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2}\Delta z^2 + \cdots + nz\Delta z^{n-1} + \Delta z^{n-1}\right]}{\Delta z}$$

Di dalam kurung siku, semua suku kecuali yang pertama Δz sebagai faktor sehingga masing-masing suku ini mempunyai limit nol bila Δz mendekati nol jadi:

$$\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$$

2. Turunan fungsi eksponen dan logaritma

a. $\frac{d}{dz} e^z = e^z$

Bukti :

Misalkan $y = e^z$ maka ln $y = e$

Menurut diferensiasi implisit, $\frac{1}{y} y' = 1$ dan karena itu $y' = y = e^z$.

b. $\frac{d}{dz} a^z = a^z \ln a$

Bukti :

$$a^z = e^{z \ln a}$$

$$\frac{d}{dz} a^z = \frac{d}{dz} e^z \ln a$$

$$\frac{d}{dz} (e^{z \ln a}) = e^{z \ln a} \frac{d}{dz} (z \ln a) = a^z \ln a$$

c. $\frac{d}{dz} \log_e z = \frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z}$

Bukti :

$$\frac{d}{dz} \log_e z = \frac{d}{d`z} \ln z = \frac{1}{z}$$

$$\frac{d}{dz} \log_e z = \frac{d}{dz} \frac{\ln z}{\ln e} = \frac{d}{dz} \frac{\ln z}{1} = \frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z}$$

d. $\frac{d}{dz} \log_a z = \frac{\log_a e}{z}$

e. $\frac{d}{dz}{}^{a}\log z = \frac{{}^{a}\log z}{z}$

3. Turunan Fungsi Trigonometri

a. $\frac{d}{dz} \sin z = \cos z$

Bukti :

$$\frac{d}{dz} \sin z = \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{d}{dz} e^{iz} - \frac{d}{dz} e^{-iz}\right)$$

$$= \frac{1}{2i} (ie^{iz} + ie^{-iz})$$

$$= \frac{i(e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$$

$$= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$= cos\ z$$

b. $\frac{d}{dz} cos\ z = -\ sin\ z$

Bukti :

$$\frac{d}{dz} cos\ z = \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dz} e^{iz} + \frac{d}{dz} e^{-iz}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}(ie^{iz} - ie^{-iz})$$

$$= \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2}$$

$$= \frac{-\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{iz}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{iz}})}{2} = -\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{iz}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{iz}}}{2\mathrm{i}}\right)$$

$$= -\ \sin z$$

c. $\frac{d}{dz} tan\ z = sec^2 z$

Bukti :

$$\frac{d}{dz} tan\ z = \frac{d}{dz} \left(\frac{sin\ z}{cos\ z}\right)$$

$$= \frac{d}{dz} \left(\frac{\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}{\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}\right) = -i \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}\right)$$

$$=-i$$

$$\frac{\frac{d}{dz}(e^{iz}-e^{-iz})(e^{iz}+e^{-iz})-(e^{iz}-e^{-iz})\frac{d}{dz}(e^{iz}+e^{-iz})}{(e^{iz}+e^{-iz})^2}$$

$=-i$

$$\frac{i(e^{iz}+e^{-iz})(e^{iz}+e^{-iz})-i(e^{iz}-e^{-iz})(e^{iz}-e^{-iz})}{(e^{iz}+e^{-iz})^2}$$

$$=\frac{(e^{2iz}+1+1+e^{-2iz})-(e^{2iz}-1-1+e^{-2iz})}{(e^{iz}+e^{-iz})^2}$$

$$=\frac{4}{(e^{iz}+e^{-iz})^2}=\left(\frac{2}{e^{iz}+e^{-iz}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{cos^2 z}=sec^2 z$$

d. $\frac{d}{dz}cot\, z=-cosec^2\, z$

Bukti :

$$\frac{d}{dz}cot\, z=\frac{d}{dz}\left(\frac{cos\, z}{sin\, z}\right)$$

$$=\frac{d}{dz}\left(\frac{\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}\right)=\frac{d}{dz}i\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}\right)$$

$=i$

$$\frac{\frac{d}{dz}(e^{iz}+e^{-iz})(e^{iz}-e^{-iz})-(e^{iz}+e^{-iz})\frac{d}{dz}(e^{iz}-e^{-iz})}{(e^{iz}-e^{-iz})^2}$$

$=i$

$$\frac{i(e^{iz}-e^{-iz})(e^{iz}-e^{-iz})-i(e^{iz}+e^{-iz})(e^{iz}+e^{-iz})}{(e^{iz}-e^{-iz})^2}$$

$$=\frac{(e^{2iz}-1-1+e^{-2iz})-(e^{2iz}+1+1+e^{-2iz})}{(e^{iz}-e^{-iz})^2}$$

$$= \frac{4}{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)^2} = -\left(\frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}\right)^2$$

$$= -\left(\frac{1}{\sin z}\right)^2 = -\, cosec^2\, z$$

e. $\frac{d}{dz} \sec z = \sec z \tan z$

Bukti :

$$= \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\cos z}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}}\right)$$

$$= \frac{\frac{d}{dz}(2)\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) - (2)\frac{d}{dz}(e^{iz} + e^{-iz})}{(e^{iz} + e^{-iz})^2}$$

$$= \frac{0 - (2i)(e^{iz} - e^{-iz})}{(e^{iz} + e^{-iz})^2} = = \frac{-(2i)(e^{iz} - e^{-iz})}{(e^{iz} + e^{-iz})^2} =$$

$$\frac{2}{(e^{iz} + e^{-iz})} \, \frac{(e^{iz} - e^{-iz})}{i(e^{iz} + e^{-iz})}$$

$$= \sec z \tan z$$

f. $\frac{d}{dz} cosec\, z = -\, cosec\, z \cot z$

Bukti :

$$= \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sin z}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}\right)$$

$$= \frac{\frac{d}{dz}(2i)\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) - (2i)\frac{d}{dz}(e^{iz} - e^{-iz})}{(e^{iz} - e^{-iz})^2}$$

$$= \frac{0 + [(2)(e^{iz} + e^{-iz})]}{(e^{iz} - e^{-iz})^2} = -\frac{(2i)}{(e^{iz} - e^{-iz})} \, \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{(e^{iz} - e^{-iz})}$$

$$= -\, cosec\, z \cot z$$

4. Turunan Fungsi Invers Trigonometri

Jika $z = \sin w$ kemudian $w = \sin^{-1} z$ disebut dengan invers *sin* dari z atau *arc sin* dari z. Secara umum kita definisikan invers trigonometri atau singular fungsi $\cos^{-1} z$, $\tan^{-1} z$, dan lain-lain.

a. $\frac{d}{dz} \sin^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

Bukti :

$w = \sin^{-1} z, \text{ maka } z = \sin w$

$dz = \cos w \, dw$

$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\cos w} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

$= \frac{d(\sin^{-1} z)}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

b. $\frac{d}{d_z} \cos^{-1} z = -\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$

Bukti :

$w = \cos^{-1} z$

$z = \cos w$

$dz = -\sin w \, dw$

$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{\sin w} = -\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$

$= \frac{d(\cos^{-1} z)}{dz} = -\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$

c. $\frac{d}{d_z} \tan^{-1} z = \frac{1}{1+z^2}$

Bukti :

$w = \tan^{-1} z$

$z = tan\ w$

$dz = sec^2\ w\ dw$

$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{sec^2 w} = \frac{1}{1+z^2}$

$= \frac{d(tan^{-1} z)}{dz} = \frac{1}{1+z^2}$

d. $\frac{d}{dz}\ cot^{-1}\ z = \frac{-1}{1+z^2}$

e. $\frac{d}{dz}\ \sec^{-1}\ z = \frac{1}{1\sqrt{z^2-1}}$

f. $\frac{d}{dz}\ \csc^{-1}\ z = \frac{-1}{z\sqrt{z^2}-1}$

5. Turunan fungsi hiperbolik

a. $\frac{d}{dz}\ sinh\ z = cosh\ z$

Bukti :

$\frac{d}{dz} sinh\ z \quad = \frac{d}{dz}\ (\frac{e^z - e^{-z}}{2}) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = cosh\ z$

b. $\frac{d}{dz}\ cosh\ z = sinh\ z$

Bukti :

$\frac{d}{dz} cosh\ z \quad = \frac{d}{dz}\ (\frac{e^z - e^{-z}}{2})$

$= \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

$= sinh\ z$

c. $\frac{d}{dz}\ tanh\ z = sech^2\ z$

Bukti :

$$\frac{d}{dz}\tanh z = \frac{d}{dz}\left(\frac{\sinh z}{\cosh z}\right)$$

$$= \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}}\right)$$

$$= \left(\frac{(e^{z} + e^{-z})\,(e^{z} + e^{-z}) - (e^{z} + e^{-z})\,(e^{z} + e^{-z})}{(e^{z} + e^{-z})^{2}}\right)$$

$$= \frac{4}{(e^{z} + e^{-z})^{2}}$$

$$= \left(\frac{2}{e^{z} + e^{-z}}\right)^{2}$$

$$= \left(\frac{1}{\cosh}\right)^{2} = \operatorname{sech}^{2} z$$

d. $\frac{d}{dz}\coth z = -\operatorname{cosch}^{2} z$

Bukti :

$$\frac{d}{dz}\coth z = \frac{d}{dz}\left(\frac{\cosh z}{\sinh z}\right)$$

$$= \frac{d}{dz}\frac{\frac{e^{z} + e^{-z}}{2}}{\frac{e^{z} - e^{-z}}{2}}$$

$$= \frac{d}{dz}\frac{e^{z} + e^{-z}}{e^{z} - e^{-z}}$$

$$= \frac{(e^{z} + e^{-z})(e^{z} + e^{-z}) - (e^{z} - e^{-z})(e^{z} + e^{-z})}{(e^{z} - e^{-z})^{2}}$$

$$= \frac{4}{(e^{z} - e^{-z})^{2}}$$

$$= \left(\frac{2}{e^{z} - e^{-z}}\right)^{2}$$

Dengan kata lain, *f* terdiferensialkan pada z_0. Jika *f* terdiferensialkan pada daerah terbuka yang berpusat di z_0 maka *f* dikatakan holomorfik di z_0

Contoh:

1. Buktikan bahwa fungsi $f(z) = z^3$ adalah holomorfik pada C, untuk $z_0 \varepsilon C$

$$f`(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{z^3 - z_0^3}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{(z^2 + 2zz_0 + z_0^2)(z - z_0)}{z - z_0}$$

$$= \lim_{z\to z_0} z^2 + 2z\, z_0 + z_0^2 = 3\, z_0^2$$

2. Tunjukkan bahwa $f(z) = \bar{z}^2$ tidak terdiferensialkan

$\lim_{z\to z_0} \frac{\bar{z}-\overline{z_0}}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{(\overline{z-z_0})}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{(\bar{z})}{z}$ tidak ada

Sehingga $f(z)$ tidak terdiferensialkan pada $z = z_0$

E. Operator Differensial Kompleks

Definisi 2

Operator ∇**(del)** dan operator **(del bar)** adalah**:**

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + i\, \frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \text{dan} \quad \bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} - i\, \frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial z}$$

F. Gradien, Divergensi, Curl dan Laplacian

Misalkan $F(x,y) = F\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) = \mathrm{G}(z, \bar{z})$dan $A(x, y) = B(z, \bar{z})$, maka

1. Gradien

$$grad\ F = \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} + i\, \frac{\partial F}{\partial y} = 2\frac{\partial G}{\partial \bar{z}}$$

2. Divergensi

$div\ F = \nabla o F = Re(\overline{\nabla}A) = Re\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P + iQ)\right\} = 2Re\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)$

3. Curl

Curl A = $\nabla x A = Im\ ((\nabla A) = \mathrm{Im}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P + iQ)\right\} = 2Im\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)$

4. Laplacian

$\nabla\ o\nabla = \nabla^2 = Re(\overline{\nabla}\nabla) = Re\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right\} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$

Sifat Sifat Gradien, Divergensi, dan Curl

1. *grad* $(A_1 + A_2) =$ *grad* $A_1 +$ *grad* A_2
2. *div* $(A_1 + A_2) =$ *div* $A_1 +$ *div* A_2
3. *curl* $(A_1 + A_2) =$ *curl* $A_1 +$ *curl* A_2
4. *grad* $((A_1A_2) = A_1$ (*grad* $A_2) +$ (*grad* $A_1)\ A_2$
5. *curl grad* $A = 0$ jika A adalah riil secara umum Im {A} harmonik
6. *div grad* $A = 0$ jika A adalah imajiner secara umum Re {A} harmonic

Contoh:

Tunjukkan bahwa $\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial B}{\partial \bar{z}}$

di mana $B(z, \bar{z}) = P(x,y) + iQ(x,y)$

$$\nabla B = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P + iQ) = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$= 2\frac{\partial B}{\partial \bar{z}}$$

G. Fungsi Analitik

Definisi 3

Suatu fungsi $w = f(z)$ dikatakan analitik di titik $z = z_0$ suatu domain D jika $f(z)$ terdefinisi dan dapat diturunkan pada setiap titik dari D. Fungsi $f(z)$ analitik pada titik $z = z_0$ di D apabila $f(z)$ analitik di dalam lingkungan dari z_0. Jadi keanalitikan $f(z)$ di z_0 berarti bahwa $f(z)$ mempunyai turunan pada setiap titik di dalam suatu lingkungan dari z_0. Untuk menguji keanalitikan suatu fungsi kompleks $w = f(z) = u\ (x,y) + iv\ (x,y)$ digunakan persamaan Cauchy – Riemann.

Definisi 4

Fungsi $w = f(z)$ dikatakan analitik di titik z_0, jika $f`(z_0)$ ada di $z_0$ dan ada pada suatu lingkungan $z_0$, sebaliknya jika $f`(z_0)$ ada, belum tentu f analitik di z_0.

Contoh:

Fungsi $f(z) = |z|^2$ tidak analitik di setiap titik z pada bidang z

Teorema 1

Misalkan $f(z) = u(x,y) + i\ v(x,y)$.$f$ analitik dalam domain D, jika dan hanya jika turunan parsial pertama dari u dan v memenuhi persamaan Cauchy – Riemann:

$$u_x = v_y \text{ dan } u_y = -v_x \textit{ atau}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Misalkan $f(x,y) = u(x,y) + i\ v(x,y)$ analitik. Maka $\dfrac{\partial f}{\partial y} = i\dfrac{\partial f}{\partial x}$

berakibat :

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} i = i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} i \right) = - \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial x}$$

Jadi diperoleh : $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ dan $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$

yang biasa dikenal dengan persamaan Cauchy-Riemann.

Syarat Persamaan Cauchy-Riemann

Syarat yang diperlukan agar fungsi f terdiferensial di $z_o = x_o + i\ y_o$ adalah syarat persamaan Cauchy-Riemann, yang menghubungkan derivatif-derivatif parsial tingkat pertama dari fungsi bagian real dan fungsi bagian imajiner dari f.

Teorema 2

Jika $f(z) = u(x,y) + i\ v(x,y)$ terdifferensial di $z_o = x_o + i\ y_o$, maka $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ mempunyai turunan parsial pertama di (x_o,y_o) dan di titik ini dipenuhi persamaan

$$Cauchy - Riemann \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ dan \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

derivatif f di z_o dapat dinyatakan dengan

$$f'(z_o) = u_x(x_o, y_o) + i\, v_x(x_o, y_o)$$

Jika persamaan C-R tidak dipenuhi di (x_o,y_o), maka $f(z) = u(x,y) + i\ v(x,y)$ tidak terdiferensial di $z_o = x_o + i\ y_o$.

Contoh 1:

Buktikan $f(z) = |z|^2$ tidak terdiferensial di $z \neq 0$!

Penyelesaian :

Bukti : $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$

Sehingga $u(x,y) = x^2 + y^2$ *dan* $v(x,y) = 0$.

Persamaan *Cauchy – Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \ dan \ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \ dan \ \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow 2x = 0 \qquad (1)$$

$$dan \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow 2y = 0 \qquad (2)$$

Dari (1) dan (2) tidak dipenuhi jika $x \neq 0$ atau $y \neq 0$, jadi pasti f tidak terdeferensial di $z \neq 0$.

> ***"Catatan: Syarat untuk persamaan C-R hanya perlu ada yang terdiferensialkan"***

Contoh 2 :

Buktikan fungsi $f(z) = \frac{+ \quad - \quad -}{+}$

Dan $f(0)=0$, tidak terdiferensial di 0 !

Penyelesaian :

Bukti :

$$u = \frac{-}{+} \quad \text{dengan } u(0,0) = 0$$

$$v = 0 \text{ dengan } v(0,0) = 0$$

$$u_x(0,0) = \lim_{x \to o} \frac{-}{} = 1$$

$$u_y(0,0) = \lim_{x \to o} \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y} = -1$$

$$v_x(0,0) = \lim_{x \to o} \frac{v(x,0) - v(0,0)}{x} = 1$$

$$v_y(0,0) = \lim_{y \to o} \frac{v(0,y) - v(0,0)}{y} = 1$$

Jadi persamaan Cauchy – Riemann terpenuhi, tetapi

Untuk z → 0 $\quad \to \quad \frac{-}{\quad} = \quad \to \quad \frac{+ \quad - \quad -}{+ \quad +}$

Sepanjang garis real y = 0 → $\quad \to \quad \frac{+}{\quad} = 1 + i$

Sepanjang garis real y = x → $\quad \to \quad \frac{\quad}{+} = \frac{\quad}{+}$

Jadi, $\lim_{z \to o} \frac{f(z) - f(0)}{z}$ tidak ada sehingga f tidak terdiferensial di 0 meskipun persamaan C-R dipenuhi di (0,0).

Teorema 3

Misalkan $f(z) = u\ (x,y) + iv\ (x,y)$ terdefinisi dan kontinu di suatu lingkungan dari $z = x + iy$ dan mempunyai turunan di z maka u_x , v_y , u_y , v_x ada dan memenuhi persamaan Cauchy - Riemann $u_x = v_y \quad u_y = -v_x$.

Teorema 4

Jika dua fungsi kontinu yang bernilai riil $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ mempunyai turunan parsial pertamanya kontinu dan memenuhi persamaan Cauchy – Riemann dalam domain D, maka fungsi kompleks $f(z) = u\ (x,y) + iv\ (x,y)$ analitik di D.

Contoh 3:

Apakah $f(z) = z^3$ analitik?

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa $u = x^3 - 3xy^2$ dan $v = 3x^2y - y^3$.

Maka $u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y$ dan $u_y = -6xy = -v_x$.

Karena memenuhi persamaan C-R maka f analitik untuk semua z.

Contoh 4:

Tentukan fungsi analitik $f(z) = u(x, y) + iV(x. y)$ apabila diketahui

a. $u = x^2 - y^2 - y$

b. $v = e^{x^2-y^2} sin\ (2xy)$

c. $u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

Penyelesaian:

a. $u = x^2 - y^2 - y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y - 1$$

Konjugat harus memenuhi $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ dan $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Sehingga :

$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x$ $\longrightarrow$ Integralkan terhadap y $\longrightarrow$ $v = 2xy + h(x)$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + 1$ Diferensialkan terhadap x:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \frac{\partial h(x}{\partial x}$$

$\frac{\partial h(x)}{\partial x} = 1$ $\longrightarrow$ Integralkan terhadap x $\longrightarrow$ $h(x) = x + c$

Jadi: $v = 2xy + h(x) = 2xy + x + c$

Fungsi analitik : $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$$= x^2 - y^2 - y + i(2xy + x + c)$$

$$= z^2 + iz + ic$$

b. $v = e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{x^2-y^2} 2x \sin(2xy) + e^{x^2-y^2}\cos(2xy) 2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{x^2-y^2}(-2y\sin(2xy) + e^{x^2-y^2} 2x\cos(2xy)$$

Konjugat harus memenuhi $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ dan $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Sehingga :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{x^2-y^2} 2x\sin(2xy) - e^{x^2-y^2}\cos(2xy) 2y \dots\dots (*)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2-y^2}(-2y)\sin(2xy) + e^{x^2-y^2} 2x\cos(2xy)$$

$$u = \int \Big(e^{x^2-y^2}(-2y)\sin(2xy) + e^{x^2-y^2} 2x\cos(2xy)\Big)dx$$

$$= -\int e^{x^2-y^2}(2y)\sin\frac{d(2xy)}{2y} + \int e^{x^2-y^2}\cos(2xy) d(x^2 - y^2)$$

$$= \int e^{x^2-y^2} d(\cos 2xy) + \int \cos 2xy\ d\big(e^{x^2-y^2}\big)$$

$$= e^{x^2-y^2}\cos 2xy - \int \cos 2xy\ d\big(e^{x^2-y^2}\big) + \int \cos 2xy\ d\big(e^{x^2-y^2}\big)$$

$$= e^{x^2-y^2}\cos 2xy + h(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2-y^2}(-2y)\cos 2xy + e^{x^2-y^2}(-\sin 2xy)2x + \frac{\partial h(y)}{\partial y}$$

Apabila dibandingkan dengan persamaan (*), maka: $\frac{\partial h(y)}{\partial y} = 0$

Sehingga : $h(y) = c$ maka $u = e^{x^2-y^2}\cos 2xy + c$

Fungsi analitik ; $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$$= e^{x^2-y^2}\cos 2xy + i\,e^{x^2-y^2}\sin 2xy + c$$

$$= e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + i\sin 2xy) + c$$

$$= e^{x^2-y^2+i2xy)} + c = e^{(x+iy)^2} + c$$

$$= e^{z^2} + c$$

c. $u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 12xy^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -12x^2y + 4y^3$$

Konjugat harus memenuhi $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ dan\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Sehingga :

$\frac{\partial v}{\partial y} = 4x^3 - 12xy^2$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 12x^2y + 4y^3 \longrightarrow v = \frac{12}{3}x^3y - 4xy^3 + h(y)$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 4x^3 - 12xy^2 + \frac{\partial h(y)}{\partial y}$$

Apabila dibandingkan, maka: $\frac{\partial h(y)}{\partial y} = 0$

Sehingga : $h(y) = c$ maka :$v = 4x^3y - 4xy^3 + c$

Fungsi analitik : $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

f(z)= x^4-6x^2 y^2+y^4+i(4x^3 y-4xy^3+c
$= z^4 + ic$

Contoh 5:

Buktikan fungsi-fungsi di bawah ini analitik:

a. $f(z) = z^4$
b. $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$
c. $f(z) = (1 + i)z^2$

Jawab:

a. $z^4 = (x + iy)^4 = (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + i\,(4x^3y - 4xy^3)$
$u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$
$v = 4x^3y - xy^3$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 12xy^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -12x^2y + 4y^3$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 4x^3 - 12xy^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 12x^2y - 4y^3$$

ternyata $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ dan $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$,
jadi $f(z) = z^4$

b. $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$
$u = e^x \cos y$
$v = e^x \sin y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\, e^x \sin y$$

$\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$

$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$

karena $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ dan $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$,

jadi $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ analitik.

c. $f(z) = (1 + i)z^2$
$(1 + i)z^2 = (1 + i)(x^2 - y^2 + i2xy) = x^2 - y^2 + i2xy + ix^2 - iy^2 - 2xy$
$u = x^2 - y^2 - 2xy$
$v = x^2 - y^2 + 2xy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y - 2x = -(2x + 2y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2y + 2x = 2x - 2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2y$$

karena $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ dan $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$,
jadi $f(z) = (1 + i)z^2$ analitik.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa syarat perlu dan cukup untuk f analitik adalah sebagai berikut :

Syarat perlu:

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_o = x_o + i\, y_o$

$f'(z)$ ada maka ada di (x_o, y_o) $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$

berlaku persamaan C-R yaitu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \; dan \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

dan $f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + i\, v_x(x_0,y_0)$

Syarat cukup:

$u(x,y)$, $v(x,y)$, $u_x(x,y)$, $v_x(x,y)$, $u_y(x,y)$, $v_y(x,y)$ kontinu pada sekitar

$z_o = x_o + i\, y_o$ dan di (x_o,y_o) dipenuhi persamaan *C-R* maka $f'(z_o)$ ada.

Sifat sifat fungsi analitik:

Misalnya f dan g analitik pada D, maka:

1) $f \pm g$ merupakan fungsi analitik
2) fg merupakan fungsi analitik
3) f/g merupakan fungsi analitik dengan $g \neq 0$
4) $h = g \circ f$ merupakan fungsi analitik
5) berlaku aturan L'hospital yaitu :

$$\lim_{z \to z_o} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}, \quad \textit{dengan}\ g(z) \neq 0 \quad g'(z) \neq 0$$

3. **Titik Singular**

Definisi 5

Titik z_1 disebut titik singular dari f jika f tidak analitik di z_1 tetapi untuk sekitar dari z_1 memuat paling sedikit satu titik di mana f analitik.

Jenis kesingularan *f(z)* atau titik singular antara lain:

1) Titik singular terisolasi
2) Titik z_o dinamakan titik singular terisolasi dari *f(z)* jika terdapat $\delta > 0$ demikian sehingga lingkaran $|z - z_o| = \delta$ hanya melingkari titik singular lainnya. Jika δ seperti itu tidak ada, maka $z = z_o$ disebut titik singular tidak terisolasi

3) Titik Pole (titik kutub)
   Titik $z = z_o$ disebut titik pole tingkat n, jika $n = 1$, z_o disebut sebagai titik pole sederhana.
4) Titik Cabang
   Dari fungsi bernilai banyak dapat menjadi titik singular.
5) Titik Singular dapat dihapuskan
   Titik singular z_o disebut titik singular dapat dihapuskan dari $f(z)$ jika $f(z)$ ada.
6) Titik Singular Essensial
   Titik singular $z = z_o$ yang tidak memenuhi syarat titik singular pole titik cabang atau titik singular yang dapat dihapuskan disebut titik singular essensial.
7) Titik Singular tak hingga
   Jika $f(z)$ mempunyai titik singular di $z = \infty$, maka sama dengan menyatakan $f(1/w)$ mempunyai titik singular di $w = 0$.

Contoh:

a. $f(z) = |z|^2$ tidak merupakan titik singular
b. $g(z) = ln\ (z^2 + z - 2)$ maka titik cabang adalah $z_1 = 1$ dan $z_2 = -2$ karena $z^2 + z - 2 = (z - 1)\ (z + 2) = 0$

4. **Persamaan C-R Pada Koordinat Kutub** :

Jika $f(z) = u(x,y) + i\ v(x,y)$ dapat diilustrasikan dalam koordinat kartesius maka dengan menggunakan hubungan x = r cos φ dan y = r sin φ , diperoleh z = r cos φ + i sin φ, sehingga f(z) = u(r, φ) + i v(r, φ) dalam sistem koordinat kutub

Jika $f(z) = u(r,\ \varphi) + i\ v(r,\ \varphi)$ terdiferensial dan kontinu pada titik $(r_o,\ \varphi_o)$ dan jika dalam titik tersebut u_r, u_φ, v_r, v_φ

ada dan kontinu di (r_o, φ_o) dan dipenuhi C-R yaitu: $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}$ dan $\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial r}$, r ≠ 0 maka $f'(z)$ ada di $z = z_o$ dan
$f'(z) = (\cos \varphi_o - i \sin \varphi_o)\,[u_r(r_o, \varphi_o) + i\, v_r(r_o, \varphi_o)]$

Contoh:

Diketahui $f(z) = z^{-3}$,tentukan $f(z)$ dalam bentuk kootdinat kutub !

Jawab:

$f(z) = z^{-3} = r^{-3}\,(\cos 3\varphi - i \sin 3\varphi)$, maka :

$u = r^{-3} \cos 3\varphi$, sehingga $u_r = -3r^{-4} \cos 3\varphi$ dan

$u_\varphi = -3r^{-3} \sin 3\varphi$

$v = -r^{-3} \sin 3\varphi$, sehingga $v_r = 3r^{-4} \sin 3\varphi$ dan

$v_\varphi = -3r^{-3} \cos 3\varphi$

keenam fungsi ini kontinu dan syarat persamaan C-R dipenuhi untuk semua $z \neq 0$

Jadi $f(z) = z^{-3}$ terdiferensial untuk $z \neq 0$. Dengan demikian $f'(z)$ dalam koordinat kutub adalah:

$f'(z) = (\cos \varphi - i \sin \varphi)\,(-3r^{-4} \cos 3\varphi + i\, 3r^{-4} \sin 3\varphi)$

$= cis(-\varphi)\,(-3r^{-4})\,cis(-3\varphi) = -3r^{-4}\,cis(-4\varphi)$

H. Fungsi Harmonik

Definisi 6

Misalkan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitik pada D maka u dan v mempunyai turunan parsial di semua orde yang kontinu pada D. Jadi dalam D berlaku persamaan C-R , $u_x = v_y$ dan $u_y = \neg v_x$

Karena turunan parsial dari u dan v kontinu dalam D, maka berlaku $v_{xy} = v_{yx}$. Jika dalam $u_x = v_y$ dan $u_y = \neg v_x$ diderivatifkan parsial terhadap x dan y maka $\forall(x,y) \in D$ berlaku

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$
$$v_{xx} = v_{yy} = 0$$

Jika f analitik pada D maka u dan v pada D memenuhi Persamaan Laplace dalam 2 dimensi.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

u dan v di mana f$(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitik pada suatu domain maka $f(z)$ harmonik pada domain tersebut.

Dua fungsi u dan v sedemikian sehingga $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitik dalam suatu domain dinamakan dua fungsi yang harmonik konjugat dalam domain itu.

Contoh:

Diberikan $u(x,y)$ harmonik pada D dan tentukan fungsi v yang harmonik konjugat dengan u = $4xy^3 - 12x^3y,\ x,y \in Z$

Jawab:

Misal konjugatnya adalah $v(x,y)$

Jadi $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitik pada Z sedemikian sehingga berlaku persamaan C-R yaitu

$u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$

$$u_x = 4y^3 - 12x^2y \qquad v_y = 4y^3 - 12x^2y$$
$$u_y = 12xy^2 - 4x^3 \quad v = y^4 - 6x^2y^2 + g(x)$$

karena $v_x = \neg u_y$ maka $-12xy^2 + g'(x) = -12xy^2 + 4x^3$ sehingga $g'(x) = 4x^3$ diperoleh g$(x) = x^4 + C$

Jadi $v = y^4 - 6x^2y^2 + x^4 + C$

LATIHAN DAN PENYELESAIAN

1. Tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut:
   a. $f(z) = tan^{-1}(z)$ *di* $z = -i$
   b. $f(z) = ln\,(z^2+2z+2)$

2. Buktikan bahwa turunan kedua dari fungsi implisit $w^2 - 2w + sin\,2z = 0$ adalah

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{\cos 2z\ - 2(1-\mathrm{w})2\sin \mathrm{z}}{(1-\mathrm{w})3}$$

3. Buktikan bahwa fungsi-fungsi di bawah ini analitik:
   b. $f(z) = z^2$
   c. $f(z) = e^x\,(cos\,y + i\,sin\,y)$
   d. $f(z) = xy - 2ixy$

4. Buktikan fungsi $f(z) = \frac{\quad + \quad - \qquad -}{+}$

   dan $f(0) = 0$, tidak terdifferensial di 0, memenuhi persamaan *C-R*

   Bukti : $u =$ *dengan* $u(0,0) = 0$ $\frac{-}{+}$

$$v = \frac{+}{+} \quad \text{dengan } v(0,0) = 0$$

$$u_x(0,0) = \underset{\rightarrow}{} \frac{-}{\qquad}$$

$$u_y(0,0) = \underset{\rightarrow}{} \frac{-}{\qquad} = -1$$

$$v_x(0,0) = \underset{\rightarrow}{} \frac{-}{\qquad} = 1$$

$$v_y(0,0) = \lim_{y \to o} \frac{v(0,y) - v(0,0)}{y} = 1$$

Jadi persamaan *C-R* terpenuhi tetapi

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{x^3(1+i)-y^3(1-i)}{(x^2+y^2)(x+iy)} \text{ untuk } z\to 0.$$

Sepanjang garis real y = 0 $\rightarrow \lim\limits_{x\to o}\dfrac{x^3(1+i)}{x^3}=1+i$

Sepanjang garis real $y = x \rightarrow \lim\limits_{x\to o}\dfrac{2i\,x^3}{2(1+i)\,x^3}=\dfrac{i}{1+i}$ jadi

$\lim\limits_{x\to o}\dfrac{f(z)-f(0)}{z}$ tidak ada sehingga *f* tidak terdiferensial di *0*
meskipun persamaan *C-R* terpenuhi di *(0,0)*

5. Buktikan $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ terdiferensial untuk setiap *z* dalam *Z*
   Bukti :
   $u(x,y) = e^x \cos y \rightarrow u_x(x,y) = e^x \cos y$
   $u_y(x,y) = -e^x \sin y$
   $v(x,y) = e^x \sin y \rightarrow v_x(x,y) = e^x \sin y$
   $v_y(x,y) = e^x \cos y$ ada dan kontinu di setiap $(x,y) \in Z$
   Berdasarkan persamaan *C-R :*
   $u_x = v_y$ *dan* $u_y = -v_x$ dipenuhi di $\forall (x,y) \in Z$, dan ada kitar di mana keenam fungsi kontinu dan persamaan *C-R* dipenuhi di *(x,y)*. Jadi $f'(z)$ ada $\forall z \in Z$. Dan

   $f'(z) = u_x(x,y) + i\, v_x(x,y) = e^x \cos y + i\, e^x \sin y.$

6. Diketahui $f(z) = z^{-3}$,tentukan $f'(z)$ dalam bentuk koordinat kutub ?
   Jawab:
   $f(z) = z^{-3} = r^{-3} (\cos 3\varphi - i \sin 3\varphi)$, maka:
   $u = r^{-3} \cos 3\varphi$, sehingga $u_r = -3r^{-4} \cos 3\varphi$ dan

$$u_\varphi = -3r^{-3} \sin 3\varphi$$

$v = -r^{-3} \sin 3\varphi$, sehingga $v_r = 3r^{-4} \sin 3\varphi$ dan

$$v_\varphi = -3r^{-3} \cos 3\varphi$$

7. Jika $A(x,y) = 2xy - i\, x^2y^3$, tentukan *grad(A), div(A), curl(A)* dan *Laplacian A*

Jawab:

$grad\ A = \nabla A = \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(2xy - i\,x^2y^3\right)\right\} =$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(2xy - i\,x^2y^3\right) + i\,\frac{\partial}{\partial y}\left(2xy - i\,x^2y^3\right) = (2y - 2ixy^3) +$

$i\,(2y - 2i\,x^2y) = (2y + 3x^2y^2) + i\,(2y - 2xy^2)$

$div\ A =$

$\nabla o A = Re(\nabla A) = Re\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(2xy - i\,x^2y^3\right)\right\} =$

$Re\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(2xy - i\,x^2y^3\right) + i\,\frac{\partial}{\partial y}\left(2xy - i\,x^2y^3\right) =\right.$

$\left.(2y - 2ixy^3) + i\,(2y - 2i\,x^2y)\right\} = Re\left\{(2y + \right.$

$\left.3x^2y^2) + i\,(2y - 2xy^2)\right\} = 2y + 3x^2y^2)$

$curl\ A = = \nabla x A = Im(\nabla A) = Im\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - \right.\right.$

$\left.\left. i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(2xy - i\,x^2y^3\right)\right\} =$

$Re\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(2xy - i\,x^2y^3\right) + i\,\frac{\partial}{\partial y}\left(2xy - i\,x^2y^3\right) =\right.$

$\left.(2y - 2ixy^3) + i\,(2y - 2i\,x^2y)\right\} = Re\left\{(2y + \right.$

$\left.3x^2y^2) + i\,(2y - 2xy^2)\right\} = 2y + 3x^2y^2)$

$Laplacian\ A = \nabla^2 A = Re(\nabla\nabla A) = Re\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - \right.\right.$

$\left. i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\left.\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\right\}\left(2xy - i\,x^2y^3\right) = =$

$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + i\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(2xy - i\,x^2y^3\right) = -2iy^3 - 6ix^2y$

SOAL-SOAL

1. Tentukan turunan fungsi berikut :
   a. $f(z) = \frac{2z-i}{z+2i}$ $di\ z = -i$
   b. $f(z) = sin\left((\frac{1}{z} \right)$
   c. $f(z) = cos^2 (\pi z)$
   d. $f(z) = sinh(z^2)$
2. Tentukan titik singular dari fungsi $f(z) = \frac{3z-2}{z^2+2z+5}$
3. Manakah fungsi-fungsi berikut yang terdiferensialkan? Yang manakah fungsi holomorfik?
   a. $f(z) = e^{-x} e^{-iy}$
   b. $f(z) = 2x + ixy^2$
   c. $f(z) = x^2 + iy^2$
   d. $f(z) = Im\ z$
   e. $f(z) = |z|^2$
   f. $f(z) = z^2 - \bar{z}^2$
4. Tentukan fungsi analitik $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ apabila diketahui :
   a. $u(x,y) = x^2 - y^2 - y$
   b. $v(x,y) = exp(x^2 - y^2)$
   c. $u(x,y) = x^2 + y^2$
   d. $u(x,y) = cosh\ y\ sin\ x$
5. Tentukan fungsi harmonik sekawan dari $u(x,y) = ln(x^2 + y^2)$
6. Periksa apakah $Re(w)$ dan $Im(w)$ dari fungsi berikut merupakan fungsi harmonik?
   a. $w = z^2 + z$
   b. $w = z^3$
7. Apabila fungsi-fungsi berikut harmonik, tentukan fungsi analitiknya.
   a. $u = y^2 - x^2$
   b. $u = xy$

8. Buktikan bahwa *curl grad* $A = 0$ jika $Im\ (A)$ harmonik
9. Jika $F = x^2y - xy^2$, tentukan $\nabla F\ dan\ \nabla^2 F$
10. Jika $B = 3z^2 + 4i$, tentukan *grad B, curl B, div B* dan *Laplacian B*
11. Buktikan bahwa : $\frac{d}{dz}e^z = e^z$
12. Misalkan diberikan fungsi homogen $u(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$
    di mana *a, b* dan *c* adalah bilangan riil.

    Tunjukkan bahwa *u* harmonik jika dan hanya jika $a = -c$
13. Tunjukkan bahwa jika *f* terdiferensialkan pada *z* maka *f* kontinu pada *z*
14. Buktikan bahwa $\frac{d}{dz}z^2\bar{z}\ tidak\ ada$
15. Buktikan bahwa $\frac{d}{dz}\sinh^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$

- oOo -

BAB 4
INTEGRAL FUNGSI KOMPLEKS

A. Integral Fungsi Elementer

Dalam fungsi kompleks ada beberapa fungsi elementer yaitu fungsi aljabar, fungsi rasional, fungsi trigonometri dan inversnya, fungsi eksponen dan logaritma, fungsi hiperbolik dan inversnya. Berdasarkan integral pada fungsi riil, maka dapat ditentukan integral dari fungsi kompleks tersebut:

1. $\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$
2. $\int \frac{dz}{z} = \ln z$
3. $\int e^z dz = e^z$
4. $\int a^z dz = \frac{a^z}{\ln a}$
5. $\int \sin z\, dz = -\cos z$
6. $\int \cos z\, dz = \sin z$
7. $\int \tan z\, dz = \ln \sec z = -\ln \cos z$
8. $\int \cot z\, dz = -\ln \csc z = \ln \sin z$
9. $\int \sec z\, dz = \ln(\sec z + \tan z) = \ln(\tan(\frac{z}{2} + \pi/4)$
10. $\int \csc z\, dz = \ln(\csc z - \cot z) = \ln(\tan(\frac{z}{2})$
11. $\int \sec^2 z\, dz = \tan z$
12. $\int \csc^2 z\, dz = -\cot z$
13. $\int \sec z \tan z\, dz = \sec z$
14. $\int \csc z \cot z\, dz = -\csc z$
15. $\int \sinh z\, dz = \cosh z$
16. $\int \cosh z\, dz = \sinh z$
17. $\int \tanh z\, dz = \ln \cosh z$

18. $\int coth\, z\, dz = ln\, sinh\, z$
19. $\int sech\, z\, dz = tan^{-1}(sinh\, z)$
20. $\int csch\, z\, dz = -coth^{-1}(cosh\, z)$
21. $\int sech^2\, z\, dz = tanh\, z$
22. $\int csch^2\, z\, dz = -\, coth\, z$
23. $\int sech\ \ z\, tanh\, z\, dz = -\, sech\, z$
24. $\int csch\ \ z\, coth\, z\, dz = -csch\, z$
25. $\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+ a^2}} = ln\{z + \sqrt{z^2 +\ a^2}\}$
26. $\int \frac{dz}{z^2+ a^2} = \frac{1}{a} tan^{-1} \frac{z}{a} = -\frac{1}{a} cot^{-1} \frac{z}{a}$
27. $\int \frac{dz}{z^2- a^2} = \frac{1}{2a} ln\ \left(\frac{z-a}{z+a}\right)$
28. $\int \frac{dz}{\sqrt{a^2- z^2}} =\ sin^{-1} \frac{z}{a}$
29. $\int \frac{dz}{z\sqrt{a^2\pm z^2}} = \frac{1}{a} ln\ \left(\frac{z}{a+ \sqrt{a^2\pm z^2}}\right)$
30. $\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2- a^2}} = \frac{1}{a} cos^{-1} \frac{z}{a} = \frac{1}{a} sec^{-1} \frac{z}{a}$
31. $\int \sqrt{z^2 \pm\ a^2} = \frac{z}{2}\left(\sqrt{z^2 \pm\ a^2}\right)$
32. $\int \sqrt{z^2 \pm\ a^2} = \frac{z}{2}\left(\sqrt{z^2 \pm\ a^2}\right) = \frac{a^2}{2} ln\left\{z + \sqrt{z^2 \pm\ a^2}\right\}$
33. $\int e^{az}\, sin\, bz\, dz = \frac{e^{az}(a\, sin\, bz - b\, cos\, bz)}{a^2+ b^2}$
34. $\int e^{az}\, cos\, bz\, dz = \frac{e^{az}(a\, cos\ \ bz + b\, sin\, bz)}{a^2+ b^2}$

B. Integral Garis Pada Bidang Kompleks

Pada kalkulus telah dikenal ada 2 macam integral, yaitu:

a. Integral tak tentu (*Indefinite Integral*) ialah suatu fungsi yang turunannya sama dengan suatu fungsi analitik tertentu dalam suatu daerah.

b. Integral tentu (*Definite Integral*) atau integral garis pada fungsi kompleks $f(z)$ dengan $z = x + iy$ dituliskan sebagai $\int_c f(z)dz$.

Untuk bagian nyata (riil) diambil di atas garis bilangan nyata. Sedangkan untuk bagian kompleks, diambil sepanjang kurva C pada bidang kompleks atau lintasan integrasi.

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

Kurva disebut *smooth* jika C mempunyai turunan:

$$z(t) = \frac{dz}{dt} = x(t) + iy(t)$$

Kurva C dinamakan lintasan integrasi, dan kemudian dapat disebut sebagai lintasan tertutup jika $z = z_0$(jika titik akhir berhimpit dengan titik awal) dilambangkan dengan:

$$\oint_c$$

Semua lintasan integrasi untuk integral garis kompleks akan diasumsikan bersifat mulus sepotong-sepotong (*piecewise smooth*), artinya terdiri atas terhingga banyaknya kurva mulus yang dihubungkan satu sama lain. Keberadaan integral garis kompleks misalnya diasumsikan $f(z)$ kontinu dan C adalah kurva mulus sepotong-sepotong, maka:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \xi_m + i\,\eta_m$$

$$\Delta z_m = \Delta x_m + i\Delta y_m$$

Jadi: $Sn = \sum (u + iv)(\Delta x_m + i\Delta y_m)$

Dengan: $u = u(\xi_m, \eta_m)$

$v = v(\xi_m, \eta_m)$

$m = 1,2,.....n$

$$S_n = \sum u\Delta x_m - \sum v\Delta y_m + i\left[\sum u\Delta y_m + \sum v\Delta x_m\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_c f(z)dz = \int_c udx - \int_c vdy$$
$$+ i\left[\int_c udy + \int_c vdx\right]$$

Maka dapat disimpulkan bahwa integral garis pada fungsi kompleks $f(z) = u + iv$ di bidang Argand dengan $z = x + iy$

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u + iv)d(x + iy)$$
$$= \int_C udx - vdy +$$
$$i(\int_C vdx + udy),$$

di mana *C* merupakan batas dari $z = x + iy$

Sifat Dasar Integral Garis Pada Bidang Kompleks:

1) Integrasi merupakan suatu operasi linier, sehingga:

$$\int_c [k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z)]\, dz$$
$$= k_1 \int_c f_1(z)dz + k_2 \int_c f_2(z)dz$$

2) Memecah (membagi) kurva menjadi 2 bagian kurva C_1 dan C_2

$$\int_c f(z)dz = \int_{c_1} f(z)dz + \int_{c_2} f(z)dz$$

3) Membalik arah integrasi

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)dz = -\int_{z_0}^{Z} f(z)dz$$

4) $\int_a^b f(z)dz = \int_a^m f(z)dz + \int_m^b f(z)dz$, di mana $a < m < b$

atau $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$, di mana $C = C_1 + C_2$

5) $\int_C f\big(z(t)\big)d\big(z(t)\big) = \int_{t_1}^{t_2} f\big(z(t)\big)z'(t)dt$, di mana $t = [t_1, t_2]$

6) $\left|\int_C f(z)dz\right| \leq ML$, di mana M merupakan batas atas $|f(z)|$, dan L merupakan panjang dari C.

1. Integral Bergantung Lintasan

Misal lintasan C dengan *z(t) = x(t) + i y(t)* ($a \leq t \leq b$) da*n f(z)* fungsi tidak analitik pada domain D (yang memuat lintasan C). Maka nilai integral lintasan f(z) terhadap C bergantung pada bentuk lintasan yang diambil dan dapat dinyatakan:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)\,dt$$

Untuk menghitung integral lintasan di atas, dilakukan cara sebagai berikut:

1. Nyatakan lintasan C dalam *z(t) = x(t) + i y(t),* $a \leq t \leq b$
2. Cari turunan, *z' (t)*.
3. Substitusikan *z(t)* ke dalam *f(z)*.
4. Integrasikan *f(z) z' (t)* terhadap *t*

Berikut beberapa lintasan C dan penyajiannya dalam *z(t)* :

a. Lingkaran

Misal diberikan lintasan C berbentuk lingkaran satuan (lingkaran dengan pusat (0,0) dan jari-jari 1) dan t sebagai sudut pusat. Maka diperoleh hubungan $x = \cos t$ dan $y = \sin t$. Oleh karena itu persamaan lintasan C, $z(t) = x(t) + i\, y(t) = \cos(t) + i \sin(t) = e^{it}$dengan $0 \leq t \leq 2\pi$.

Sedangkan lintasan C berbetuk lingkaran dengan pusat z = (0,0) dan jari-jari r dapat ditentukan dengan cara sama, sehingga persamaan dituliskan sebagai:

$$z(t) = x(t) + i\, y(t) = re^{it} \text{dengan } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Menggunakan transformasi dengan koordinat Kartesius dan bentuk persamaan lintasan di atas didapatkan persamaan lintasan C berbentuk lingkaran dengan pusat z_0 dan jari-jari r, yaitu:

$$z(t) = z(0) + re^{it}, \text{ dengan } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Contoh:

Hitung integral dari $f(z)=\frac{1}{z}$ atas lintasan C berbentuk lingkaran satuan dengan arah berlawanan jarum jam.

Jawab :

Persamaan lintasan C : z(t) = e^{it}dengan $0 \leq t \leq 2\pi$.

$z\,'(t) = i\, e^{it}$

$f(z)=\frac{1}{z} = \bar{e}^{it}, \oint_C f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(z)\, z'(t)dt = \int_0^{2\pi} e^{it}\, i\, e^{-ti\theta} dt = 2\pi i$

b. Segmen Garis

Misal lintasan C berbentuk segmen garis dari z_0 (x_0, y_0) ke $z_1(x_1, y_1)$. Maka kita pilih terlebih dahulu interval parameter t, misal $0 \leq t \leq 1$ dan dengan cara deduktif dapat diturunkan

Persamaan untuk lintasan C yaitu :

$t = 0$, maka $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ maka $z(t) = x_0 + iy_0 = z_0$

$t = \frac{1}{4}$, maka $x(t) = \frac{xo+3x1}{4}$, $y(t) = \frac{y0+3y1}{4}$ maka $z(t) = z_0 + \frac{1}{4}(z_1 - z_0)$

$t = 1$, *maka* $x(t) = x_1$, $y(t) = y_1$, *maka* $z(t) = z_1$

Secara umum, persamaan lintasan C berbentuk segmen garis dari z_0 ke z_1 yaitu :

$z(t) = z(0) + t(z(1) - z(0))$ dengan $0 \leq t \leq 1$

Contoh:

Hitung $\int_C f(z)\, dz$ dengan $f(z) = \bar{z}$ dan lintasan C berupa segmen garis dari $z = 2 - 3i$ *ke* $z = 1 + 2i$.

Jawab :

Persamaan lintasan $C : z(t) = 2 - 3i + t(-1 + 5i) = 2 - t + i(-3 + 5t),\ 0 \leq t \leq 1$.

Turunan, $z'(t) = -1 + 5i$.

$f(z) = \bar{z} = 2 - t - i(-3 + 5t)$

$\int_C f(z)dz = \int_0^1 f(z)z'(t)dz = \int_0^1 (2 - t - i(-3 + 5t))\, dt = -\frac{7}{2} + 7i.$

c. Ellips

Misal Lintasan C berbentuk ellips: $\frac{(x-x0)^2}{a^2} + \frac{(y-y0)^2}{b^2} = 1$ dengan arah positif.

Maka dengan cara sama seperti menentukan persamaan lintasan yang berbentuk lingkaran, didapatkan:

$z(t) = z0 + a \cos t + i\, b \sin t$, dengan $0 \le t \le 2\pi$ dan $z_0 = (x_0, y_0)$.

Contoh:

Hitung $\int_C f(z)\, dz$ dengan $f(z) = x - iy$ dan lintasan C berbentuk ellips $4x^2 + y^2 = 4$ dengan arah berlawanan jarum jam.

Jawab :

Bentuk lintasan C: $x^2 + \frac{y^2}{2^2} = 1$ dengan penyajian $z(t) = \cos t + 2\, i \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

Turunan, $z'(t) = -\sin t + 2\, i \cos t$.

$f(z) = \cos t - 2\, i \sin t$

$$\int_C f(z)\, dz$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos t - 2\, i \sin t)(-\sin t + 2i \cos t)\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} \sin 2t + 2i\right)\, dt = \left(-\frac{3}{4} \cos 2t + 2it\right)_0^{2\pi} = 4\pi i$$

d. Kurva

Bila lintasan C dinyatakan sebagai persamaan kurva, maka kita dapat memisalkan $x(t) = t$. Sehingga interval parameter t dan bentuk y(t) sangat bergantung berturut-turut terhadap nilai x dari titik dan persamaan kurva yang diberikan. Sebagai contoh, misal lintasan C berupa kurva dengan persamaan $y = 3x^2 - 3$ dari titik (-1,0) ke titik (0,-3).

Persamaan lintasan : $z(t) = x(t) + i\, y(t) = t + i\,(3\, t^2 - 3)$ dengan $-1 \leq t \leq 0.$

<u>Contoh:</u>

Hitung integral dari fungsi f(z) = xy + 2iy atas lintasan C sepanjang kurva y = $3x^2$ - 3 dari titik (-1,0) ke titik (0,-3).

<u>Jawab:</u>

Persamaan lintasan $C : z(t) = x(t) + i\, y(t) = t + i\,(3$ $t2 - 3\,)$ dengan $-1 \leq t \leq 0.$

Turunan, $z\,'(t) = 1 + 6\,i\,t$

$$f(z) = \mathrm{t}\,(3\mathrm{t}^2 - 3) + 2\mathrm{i}\,(3\mathrm{t}^2 - 3)$$
$$= 3\mathrm{t}^3 - 3\mathrm{t} + \mathrm{i}\,(6\mathrm{t}^2 - 6)$$

$$\int_C f(z)\,dz$$

$$= \int_{-1}^{0} [3t^3 - 3t + i\,(6t^2 - 6)]\,(1 + 6it)\,dt = -\frac{39}{4} + \frac{32}{5}i$$

2. Integral Bebas Lintasan

Dalam keadaan khusus, integral lintasan tidak bergantung (bebas) terhadap lintasan. Artinya nilai integral lintasan akan bernilai sama walaupun lintasannya berbeda asalkan titik titik ujung lintasan tetap. Syarat perlu dan cukup untuk keadaan tersebut diberikan berikut.

Domain D disebut tersambung sederhana bila setiap lintasan tutup sederhana dalam D melingkupi titik-titik pada D. Misal *f(z)* analitik pada domain tersambung sederhana D.

Maka terdapat fungsi analitik *F(z)* sehingga *F' (z) = f(z)* untuk setiap $z \in D$ dan nilai integral dari *f(z)* terhadap setiap lintasan yang menghubungkan dari titik *z0 ke z1* dinyatakan sebagai:

$$\int_{z0}^{z1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$$

Dari kondisi di atas dapat disimpulkan bahwa bila f(z) analitik pada domain terhubung sederhana yang memuat lintasan tutup C maka : $\oint_C f(z)dz = 0$.

<u>Contoh:</u>

Hitung $\int_C f(z)dz$ bila f(z) = z sin z dan lintasan C berupa ruas garis yang menghubungkan dari titik (π,3π) ke titik (2π,-π).

<u>Jawab :</u>

Pandang bahwa *f(z) = z sin z* merupakan fungsi *entire*, sehingga analitik pada domain tersambung sederhana yang memuat lintasan C. Oleh karena itu, integral lintasan dari *f(z)* tidak bergantung (bebas) bentuk lintasan.

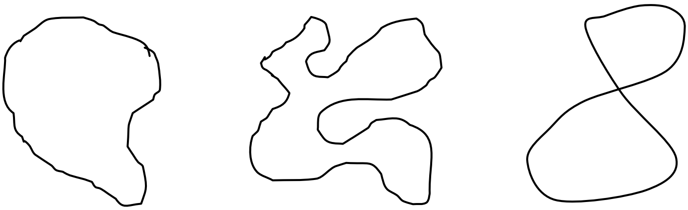
Jadi :

$$\int_C f(z)dz = \int_{\pi+3\pi i}^{2\pi-i\pi} z\sin z\, dz = (-z\cos z + \sin z)_{\pi+3\pi i}^{2\pi-i\pi}$$
$$= (\pi i - 2\pi)\cosh\pi - \sinh\pi - (\pi + 3\pi i)\cosh\pi + \sinh 3\pi$$

C. Teorema Integral Cauchy

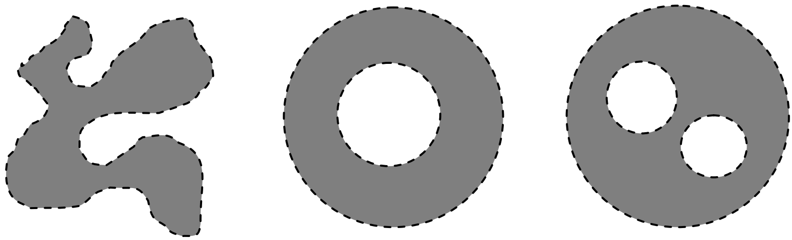
Integral garis dari fungsi kompleks *f(z)* tidak hanya tergantung pada titik akhir lintasan, tetapi juga tergantung pada pilihan lintasannya. Jika *f(z)* analitik pada domain D dan D secara sederhana terhubung, maka integral tidak akan tergantung pada lintasannya.

Lintasan tertutup sederhana yaitu lintasan yang tidak memotong atau tidak menyinggung dirinya sendiri.



Sederhana Sederhana Tidak Sederhana

Domain terhubungkan secara sederhana jika setiap lintasan tertutup sederhana dalam domain melingkungi hanya titik-titik dalam domain.



Terhubungkan Sederhana Terhubungkan Lipat–Dua Terhubungkan Lipat-Tiga

Teorema 1

Integral Cauchy I)

Misalkan fungsi f analitik pada interior C dan pada lengkungan tertutup C tersebut. Jika z_0 titik dari interior C, maka

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

dengan pengintegralan mengambil arah positif pada lengkungan tertutup C.

Perhatikan ruas kiri dari rumus tersebut. Rumus tersebut menyatakan nilai fungsi analitik f di suatu titik dari interior C dan ruas kanan menunjukkan nilai integral yang menyangkut fungsi f, sepanjang lengkungan tertutup C, yang merupakan batas dari daerah yang terdiri dari interior C dan lengkungan tertutup C tersebut.

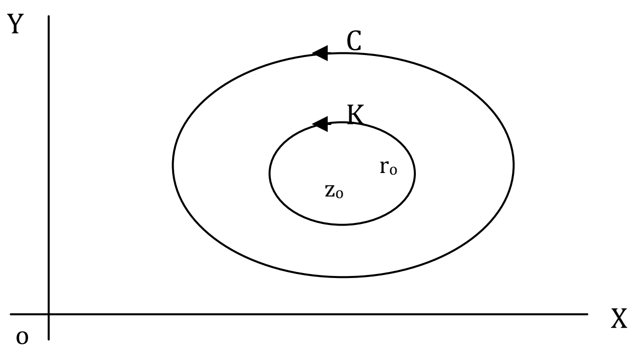
Kesamaan yang ada menunjukkan bahwa setiap pengubahan nilai fungsi f pada interior C, selalu diiringi oleh berubahnya nilai integral yang menyangkut fungsi f, pada batasnya.

Bukti:

Misalkan K lingkaran dengan pusat $z_{0,}$ berjari-jari r_0, dengan r_0 positif cukup kecil, dan K merupakan titik-titik dari interior C.

Persamaan lingkaran K tersebut $|z - z_0| = r_0$ atau $z - z_0 = r_0\, e^{i\theta}$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$, lihat gambar berikut:



Fungsi $\frac{f(z)}{z - z_0}$ analitik pada interior C pada lengkungan C, kecuali di titik z_o.

Apabila C dan K mengambil arah yang sama, yaitu arah positif, maka menurut Teorema Anulus.

$$\int_C \frac{f(z)dz}{z - z_0} = \int_K \frac{f(z)dz}{z - z_0}$$

Ruas kanan kita tulis *f(z) = f(z₀) + f(z) – f(z₀),* maka

$$\int_C \frac{f(z)dz}{z - z_0} = f(z_0)\int_K \frac{dz}{z - z_0} + \int_K \frac{f(z) + f(z_0)}{z - z_0}dz$$

Tetapi untuk setiap z pada K.

dan $dz = i\, r_o e^{i\theta}$ sehingga diperoleh

$$\int_K \frac{dz}{z - z_0} = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

Selanjutnya fungsi f analitik di z_o, berarti f kontinu di z_o dan menurut definisi kekontinuan untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$, sehingga

$\left|f(z) - f(z_0)\right| > \varepsilon$, *apabila* $\left|z - z_0\right| > \delta$

Pilih r_o lebih kecil dari δ, maka diperoleh:

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| < \frac{\varepsilon}{r_0}\text{, di setiap } z \text{ pada } K.$$

Keliling (panjang) lingkaran K adalah $2\pi\, r_o$.

Menurut Teorema 2.2.5

$$\left|\int_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}dz\right| < \frac{\varepsilon}{r_0}2\pi r_0 = 2\pi\varepsilon$$

Karena ε bilangan positif yang dapat diambil sekecil mungkin, maka

$$\left|\int_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| = 0 \text{ dan berarti}$$

$$\int_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = 0$$

Terakhir diperoleh

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0)\cdot 2\pi i \ + 0, \text{ atau}$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}$$

Titik a dan b di D, maka

$$\int_a^b f(z)dz$$

$= F(b) - F(a)$, yang merupakan integral tertentu.

Teorema 2

Integral Cauchy II)

Misalkan D daerah yang terdiri dari lengkungan tertutup C dan interiornya. Titik z_0 suatu titik dari interior C, arah pada lengkungan C arah positif. Jika *f(z)* analitik pada D, maka turunan ke n dari *f(z)*, yaitu $f^{(n)}(z_0)$ ada untuk $n = 1, 2, 3, \ldots$. Nilai turunan tersebut adalah

1. $f'(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\, dz$

$$2.\ f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\, dz$$

Rumus umumnya:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

Bukti melalui definisi turunan

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Menurut rumus integral Cauchy I, maka

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{2\pi i\, \Delta z} \left[\int_C \frac{f(z)}{z-(z_0+\Delta z)} dz - \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz \right]$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \left[\frac{1}{\Delta z} \left(\frac{1}{z-(z_0+\Delta z)} - \frac{1}{z-z_0} \right) \right] dz$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \left[\left(\frac{1}{(z-z_0)^2} + \frac{\Delta z}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)} \right) \right] dz$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

$$+ \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

$$+ \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz$$

Pada lengkungan C, fungsi f(z) analitik dan berarti pula f(z) kontinu, sehingga $\left| f(z) \right|$ □ M untuk suatu bilangan positif M.

Andaikan d jarak dari titik pada C yang paling dekat kepada z_0, maka untuk setiap z pada C.

$$\left| z - z_o \right| \geq d \text{ atau } \frac{1}{|z - z_0|} \leq \frac{1}{d}$$

Apabila $|\Delta z| \leq \frac{1}{2} d$ maka untuk setiap z pada C

$$\left| z - z_0 - \Delta z \right| \geq \frac{1}{2} d \text{ atau } \frac{1}{|z - z_0 - \Delta z|} \leq \frac{2}{d}$$

Misalkan L menyatakan panjang lengkungan C, maka kita peroleh

$$\left| \frac{\Delta z}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz \right| < \frac{|\Delta z|\, M}{2\pi \frac{1}{2} d d^2}$$

Jika Δz menunjukkan nol maka ruas kanan menuju nol, sehingga didapat

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz = 0$$

Dengan demikian terbukti bahwa

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \, dz$$

Dengan definisi turunan ke n dar f(z) dititik z_0, yaitu

$$f^{(n)}(z_o) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f^{(n-1)}(z_o + \Delta z) - f^{(n-1)}(z_o)}{\Delta z}$$

Teorema 3

Apabila f(z) analitik pada suatu daerah D, maka turunan ke *n; n = 1, 2, 3, ...,* juga analitik pada D.

Teorema 4

Apabila f(z) analitik pada lingkaran $C : |z - z_o| = r$ pada interiornya dan *f(z)* terbatas pada C, yaitu $|f(z)| \leq M$, untuk setiap z pada C.

Maka untuk *n = 0, 1, 2, ... ,*

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!\,M}{r^n}$$

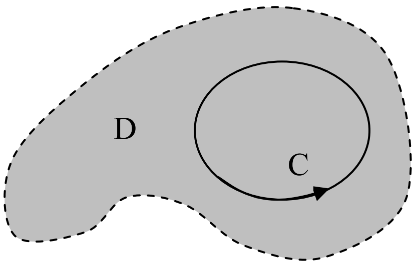
D. Teorema Integral Cauchy (Goursat)

Jika f(z) analitik di dalam suatu domain D yang terhubungkan sederhana, maka untuk setiap lintasan tertutup sederhana C di dalam D.

$$\oint_{c} f(z)dz = 0$$

Jika *f*(z) analitik di dalam suatu domain D yang terhubungkan sederhana, maka untuk setiap lintasan tertutup sederhana C di dalam D.

$\oint^{c}$ $f(z)dz$ =0



Kontur *(Contour)*= Lintasan tertutup sederhana (*simple closed path*)

Integral kontur = Integral pada lintasan tertutup sederhana (*integral over such a path*)

Contoh:

1. Tidak singular atau fungsi keseluruhan (*entire function*)

$$\oint_{c} e^{2}dz = 0 \oint_{c} \cos zdz$$

$$= 0 \qquad \oint_{c} z^{n}dz$$

$$= 0, (n = 0,1, \dots)$$

Untuk sembarang lintasan tertutup, karena fungsi-fungsi ini secara keseluruhan analitik untuk semua z.

2. Singular di luar Kontur

$$\oint_c \sec z dz = 0 \qquad\qquad \oint_c \frac{dz}{z^2 + 4} = 0$$

C adalah lingkaran satuan (*unit circle*)

$\sec z = \frac{1}{\cos z}$ tidak analitik di $z = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, ...$

Namun semua titik terletak di luar C.

$\frac{1}{z^2+4}$ tidak analitik di $z = \pm 2i$ di luar C.

3. Fungsi non analitik

$$\oint_c \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = 2\pi i$$

dengan$C : z(t) = e^{it}$adalah lingkaran satuan, sedangkan $f(z) = \bar{z}$ tidak analitik

4. Cukup keanalitikan, tidak keharusan

$$\oint_c \frac{dz}{z^2} = 0$$

dengan C adalah lingkaran satuan,sedangkan $f(z) = \frac{1}{z^2}$ tidak analitik di z = 0.

5. Esensial terhubung sederhana

$$\oint_c \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

C terletak dalam anulus $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$ dan $\frac{1}{z}$ analitik, namun domain tidak terhubung sederhana, sehingga teorema Cauchy tidak dapat diterapkan. Karena fungsi $\frac{1}{z}$ tidak analitik di z = 0.

Pembuktian Teorema Integral Cauchy

Dalam bab ini dibicarakan mengenai pembuktian teorema Integral Cauchy, yang pembuktiannya dapat digolongkan atas dua cara:

1. Dibuktikan dengan menggunakan teorema Green.
2. Dibuktikan dengan menggunakan beberapa teorema riil variabel.

Teorema 5

Misalkan *f(z)* analitik pada daerah terhubung. C adalah path tertutup dalam daerah terhubung maka :

$$\int_{c} f(z)dz = 0$$

Teorema integral Cauchy ini berlaku untuk daerah terhubung sederhana dan daerah terhubung tak sederhana.

Pada mulanya Cauchy membuktikan teorema tersebut dengan memakai pembatasan bahwa f(z) memenuhi f′(z) juga kontinu di D (daerah). Selanjutnya Goursat membuktikan teorema tersebut dengan menghilangkan syarat tambahan (pembatasan tadi) untuk *f(z)*. Sejak itu teorema tersebut dinamakan sebagai teorema Cauchy-Goursat.

a. Pembuktian Teorema Integral Cauchy dengan Menggunakan Teorema Green.

Teorema 6

Misalkan f(z) analitik pada daerah terhubung R. C adalah *path* tertutup dalam daerah terhubung, maka:

$$\int_c f(z)dz = 0$$

Bukti: Karena f(z) = u + iv diketahui analitik dan mempunyai turunan kontinu, maka :

$$f^{'}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Sehingga :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (2)$$

Kontinu di dalam dan pada *path* C.

Jadi teorema Green dapat digunakan, sehingga diperoleh:

$$\int_c f \ \ (z)dz = \int_c (u + iv)\ (\ dx + idy)$$

$$\int_c f(z)dz = \int_c (udx - vdy) + i\int_c (vdx + udy$$

Dengan menggunakan persamaan 1 dan 2 diperoleh:

$$\int_d f(z)dz$$

$$= \iint_d \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy$$
$$+ i \iint_d \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy$$

$$\int_c f(z)dz = 0$$

Cara lain:

Hasil yang sama akan diperoleh yaitu dengan memakai bentuk kompleks teorema Green sebagai berikut :

Dengan *menuliskan* $f(z) = B\ (z,\bar{z}\ ),$ dan karena $f(z)$ bebas dari $\bar{z}$ maka $\frac{\partial B}{\partial \bar{z}} = 0$

Sehingga:

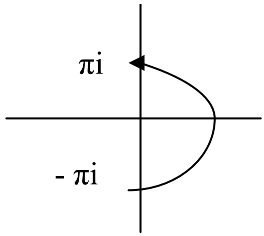
$$\int_C f(z)dz = \iint_D \frac{\partial B}{\partial \bar{z}} dx\, dy = 0$$

LATIHAN DAN PENYELESAIAN

1. Tentukan integrasi kompleks berikut :
   a. $\int_C \cos zdz$, C adalah $\frac{1}{2}$ lingkaran $|z| = \pi$; $x \geq 0$ dari $-\pi i$ ke πi

   Jawab:

   a. $\int_{\boldsymbol{C}} coszdz$**,** C adalah$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ lingkaran $|z| = \pi$; $x \geq 0$ dari $-\pi i$ ke πi.



Dari mata kuliah kalkulus, telah kita ketahui bahwa $\int_{C} cosxdx = sinx$.

Maka :

$$\int_{C} cosz\, dz = sinz|_{-\pi i}^{\pi i} = sin\pi i - \sin(-\pi i) = \sin\pi i + sin\pi i = 2sin\, \pi i$$

Karena *sin iz = i sinh z*

Jadi $\int_{C} coszdz = 2sin\pi i = 2isinh\pi$

b. $\int_{C} sin^2 zdz$, C adakah $\frac{1}{2}$ lingkaran |*z*| = π ; dari –πi ke πi pada bidang sebelah kanan

Jawab :

$\int_{C} sin^2 zdz$, C adalah $\frac{1}{2}$lingkaran |z| = π ; dari –πi ke πi pada bidang sebelah kanan.

Tentu fungsi di atas tidak dapat langsung diintegralkan. Kita perlu melakukan 'trik' trigonometri, yaitu : cos(2x) = 1 –$\sin^2$x,

Maka : $sin^2z = \frac{1-cos2z}{2}$

Dengan demikian : $sin^2z = \frac{1-cos2z}{2}$

$$\int_{C} sin^2 zdz = \frac{1}{2}\int_{C} 1 - cos2zdz$$

$$= \frac{1}{2}\ (z - \frac{sin2z}{2})|_{-\pi i}^{\pi i}$$

$$= \frac{1}{2}\ [(\pi i — \pi i) - \frac{1}{2}\ (sin2\pi i - sin(-2\pi i))]$$

$$= \frac{1}{2}\ [2\pi i - \frac{1}{2}(2sin2\pi i)]$$

$$= \pi i - \frac{1}{2} sin\ 2\pi i$$

$$= \pi i - \frac{1}{2} i \sinh 2\pi$$

$$= i\left(\pi - \frac{1}{2} sinh\ 2\boldsymbol{\pi}\right)$$

c. $\int_C ze^{z^2} dz$, C adalah dari *1* menuju *i* sepanjang sumbu kompleks

Jawab :

$\int_C ze^{z^2} dz$, C adalah dari *1* menuju *i* sepanjang sumbu kompleks.

Pertama, misalkan $u = z^2$, maka $du = 2zdz$, atau $\frac{du}{2} = zdz$, sehingga $\int_C ze^{z^2} dz = \int_C e^u \frac{du}{2}$. C berubah menjadi C^1, artinya terjadi transformasi dari kurva C ke kurva C^1

$z_0 = 1, maka\ u_0 = 1^2 = 1$

$z_1 = i, maka\ u_1 = i^2 = -1$

$$\int_{C^1} e^u \frac{du}{2} = -\frac{1}{2} e^u|_1^{-1} = \frac{1}{2}(e^1 - e^{-1})$$

$$= -\frac{1}{2}(e^1 - e^{-1})$$

Karena $sinhz = \frac{1}{2}(e^z - e^{-1})$

Jadi, $\int_{C^1} e^u \frac{du}{2} = -\frac{1}{2}(e^1 - e^{-1}) = -sinh1$

d. $\int_C \sinh \pi z dz$, C adalah dari i menuju 0 sepanjang sumbu y

Jawab:

$\int_C \sinh \pi z dz$, C adalah dari *i* menuju *0* sepanjang sumbu *y* untuk sekedar diingat kembali bahwa:

$cosh = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}),\ sinh = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$

Maka : $\int_C \sinh \pi z dz = \frac{\cosh \pi z}{\pi} |_i^0$

$$= \frac{1}{\pi}(cosh0 - cosh\pi i)$$

$$= \frac{1}{\pi}(1 - \cosh \pi i)$$

(ingat : cosh ix = cos x dan cos ix = cosh x)

$$\int_C \sinh \pi z dz = \frac{1}{\pi}(1 - cos\pi)$$

$$== \frac{1}{\pi}\left(1 - (-1)\right) = \frac{2}{\pi}$$

e. $\int_C \sec^2 zdz$, C adalah jalur sembarang dari $\frac{\pi i}{4}$ ke $\frac{\pi}{4}$

$$\int_C \sec^2 zdz = \tan z |_{\frac{\pi i}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi i}{4} = 1 - i\tanh\frac{\pi}{4}$$

2. Hitung $\int_C f(z)\, dz$dengan $f(z) = x - i\, y$ dan lintasan C berbentuk ellips$4x^2 + y^2 = 4$ dengan arah berlawanan jarum jam.

Jawab:

Bentuk lintasan *C*: $x^2+\frac{y^2}{2^2} = 1$ dengan penyajian $z(t) = \cos t + 2\, i \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

$z\,'(t) = -\sin t + 2\, i \cos t$.

$f(z) = \cos t - 2\, i \sin t$

$$\int_C f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} (\cos t - 2\, i \sin t)(-\sin t + 2i \cos t)\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2}\sin 2t + 2i\right) dt = \left(-\frac{3}{4}\cos 2t\ + 2it\right)_0^{2\pi} = 4\pi i$$

3. Hitunglah $\int_C\ f(z)dz$, jika :
   a. $f(z) = z + \frac{1}{z}$, dan c ialah lingkaran satuan (searah jarum jam)

Jawab:

$f(z) = z + \frac{1}{z}$, dan *C* ialah lingkaran satuan (searah jarum jam)

C adalah lingkaran satuan (searah jarum jam)

$z(t) = e^{-it}. \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$

Kurva disebut *smooth* jika C mempunyai turunan, sehingga :

$$z(t) = \frac{dz}{dt} = -ie^{-it}$$

$$dz = -ie^{-it}dt$$

$$f(z) = z + \frac{1}{z}, f\big(z(t)\big) = e^{-it} + \frac{1}{e^{-it}}$$

$$= e^{-it} + e^{+it}$$

$$\oint_C \left(z+\frac{1}{z}\right)dz = \oint_0^{2\pi} \left(e^{it}+e^{-it}\right) - ie^{-it}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -ie^{-2it}dt + \int_0^{2\pi} -idt$$

$$= \frac{-i}{2i}e^{-2it}|_0^{2\pi} - it|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-4\pi} - e^{0i}\right) - 2\pi i$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 4\pi - i\sin 4\pi - 1 - i0) - 2\pi i$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \mathrm{i}0 - 1 - \mathrm{i}0) - 2\pi\mathrm{i}$$

$$= -2\pi i$$

b. *f(z) = Re z* , dan C adalah parabola $y = x^2$ dari *0* sampai *1+i*
Jawab:

$z(t) = t + it^2 \qquad\qquad 0 \le t \le 1$

$f[z(t)] = Rez(t) = t$

$\dot{z}(t) = 1 + 2it$

$$\oint_C Rez\,dz = \int_0^1 t(1+2it)dt$$

$$= \frac{1}{2}t^2 + \frac{2i}{3}t^3|_{t=0}^{t=1}$$

$$= \frac{1}{2}(1-0) + \frac{2i}{3}(1-0)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i$$

4. Hitunglah nilai integral fungsi sepanjang lingkaran satuan dalam arah berlawanan arah jarum jam dan hubungkan dengan teorema Cauchy.
   a. f(z) = $\frac{1}{\bar{z}}$
      Jawab:

      $$f(z) = \frac{1}{\bar{z}} \qquad maka \oint_C \frac{1}{\bar{z}}\, dz = 0$$

      Untuk soal ini, teorema Cauchy <u>tidak dapat</u> diterapkan, karena $\bar{z}$ tidak analitik.

   b. *f(z)* = $\bar{z}^2$
      Jawab ;
      $f(z) = \bar{z}^2 \qquad maka \oint_C \bar{z}^2\, dz = 0$

   Untuk soal ini, teorema Cauchy <u>tidak dapat</u> diterapkan, karena $\bar{z}$ tidak analitik.

5. Hitunglah $\oint_C \frac{e^z}{z-2} dz$ dengan menggunakan integral Cauchy.
   Jawab:
   $\oint_C \frac{e^z}{z-2} dz = 2\pi i e^2|_{z=2} = 2\pi i e^2$ untuk setiap kontur yang melidungi $z_0 = 2$ dan bernilai nol untuk setiap kontur yang tidak melindungi $z_0 = 2$

6. Hitunglah $\oint_C \frac{z^3 - 6}{2z-i} dz$ dengan menggunakan integral Cauchy.
   Jawab:

$$\oint_C \frac{z^3-6}{2z-i}\,dz$$

$$= \oint_C \frac{\frac{1}{2}z^3-3}{2-\frac{1}{2}i}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{2}z^3-3\right)\Big|_{z=\frac{i}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{8} - 6\pi i$$

$z_0 = \frac{1}{2}i$ terletak di dalam C.

7. Integralkan $\frac{z^2}{z^2+1}$ dengan arah berlawanan arah jarum jam sepanjang lingkaran $|z+i| = 1$

$$\int \frac{z^2}{z^2+1}\,dz \;;\quad C : |z+1| = 1$$

$$\int \frac{z^2}{z^2+1}\,dz = \int \frac{z^2}{(z-i)}\frac{dz}{(z+i)} = 2\pi i\left(\frac{z^2}{z-i}\right]_{z=-i}$$

$$= 2\pi i\,\frac{i^2}{-2i} = \pi$$

8. Hitung integral dari fungsi *f(z) = xy + 2iy* atas lintasan *C* sepanjang kurva $y = 3x^2 - 3$ dari titik *(-1,0)* ke titik *(0,-3).*

   Jawab:

   Persamaan lintasan *C : z(t) = x(t) + i y(t) = t + i (3* t^2 *- 3)* dengan $-1 \le t \le 0$.

   Turunan, z ‘ (t) = 1+ 6 i t

   $f(z) = \mathrm{t}\,(3\mathrm{t}^2-3) + 2\mathrm{i}\,(3\mathrm{t}^2-3)$

   $\qquad = 3\mathrm{t}^3 - 3\mathrm{t} + \mathrm{i}\,(6\mathrm{t}^2-6)$

$$\int_C f(z)\, dz$$

$$= \int_{-1}^{0} [3t^3 - 3t + i\,(6t^2 - 6)]\,(1 + 6it)\, dt = -\frac{39}{4} + \frac{32}{5} i$$

9. Hitung $\int_C f(z)dz$ bila f(z) = z sin z dan lintasan C berupa ruas garis yang menghubungkan dari titik (π,3π) ke titik (2π,-π).
   Jawab:
   Pandang bahwa f(z) = z sin z merupakan fungsi *entire*, sehingga analitik pada domain tersambung sederhana yang memuat lintasan C. Oleh karena itu, integral lintasan dari f(z) tidak bergantung (bebas) bentuk lintasan.
   Jadi:

$$\int_C f(z)dz = \int_{\pi+3\pi i}^{2\pi - i\pi} z \sin z\, dz$$
$$= (-z\cos z + \sin z)_{\pi+3\pi i}^{2\pi - i\pi}$$
$$= (\pi i - 2\pi)\cosh \pi - \sinh \pi - (\pi + 3\pi i)\cosh \pi + \sinh 3\pi$$

SOAL-SOAL

1. Hitunglah $\int_C f(z)dz$, jika :
   a. $f(z) = \frac{3}{2z}$, dan C adalah busur lingkaran dari 2 searah jarum jam sampai -2i
   b. $f(z) = |z|^2$, dan C adalah lingkaran satuan (berlawanan arah jarum jam)
   c. $f(z) = (z-i)^{-1}$, dan C adalah lingkaran $|z-i|= 2$ (searah jarum jam)
2. Hitunglah nilai integral fungsi sepanjang lingkaran satuan dalam arah berlawanan arah jarum jam dan hubungkan dengan teorema *Cauchy*.
   a. $f(z) = \frac{1}{z^3}$
   b. $f(z) =$ lm z
   c. $f(z) =$ tan z
3. Integralkan $\frac{z^2}{z^4 - 1}$ dengan arah berlawanan arah jarum jam sepanjang lingkaran $|z-1| = 1$
4. Integralkan $\frac{1}{4z+i}$ dengan arah berlawanan jarum jam sepanjang lingkaran satuan.
5. Integralkan fungsi $\frac{z^2}{(2z-1)^2}$ dalam arah berlawanan arah jarum jam sepanjang lingkaran satuan.
6. Integralkan fungsi $\frac{z^3}{(2z+i)^3}$ dalam arah berlawanan arah jarum jam sepanjang lingkaran satuan
7. Hitunglah $\int_C \frac{e^{3z}}{z-\pi i}dz$, jika C lingkaran $|z-1| = 4$ dengan arah positif.
8. Hitunglah $\int_C \frac{\cos \pi z}{z^2 - 1}dz$, apabila C berupa empat persegi panjang dengan titik-titik sudut *–i, 2-i 2+i, i.*
9. Hitunglah $\int_C \frac{7z+8i+3}{(z+1)(z+2i)}dz$, jika C lingkaran $|z| = 4$. Arah positif (melawan jarum jam).

10. Tunjukkan bahwa $\int_0^{\sim} xe^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}$

- oOo -

BAB 5
BARISAN DAN DERET BILANGAN KOMPLEKS

A. Barisan Bilangan Kompleks

Definisi 1

Barisan kompleks adalah bilangan kompleks yang diurutkan dengan suatu pola tertentu. Biasanya ditulis dalam bentuk berikut ini:

$z_1, z_2, z_3, \ldots$ **atau** $\{z_1, z_2, z_3, \ldots\}$ atau secara singkat $\{z_n\}$ ….

Bilangan-bilangan $z_1, z_2, z_3,$, … di atas disebut sebagai suku-suku barisan. Suku ke z_n disebut sebagai suku umum atau suku ke-n barisan tersebut.

Contoh:

- $\left\{\frac{3i}{2^n}\right\} = \frac{3i}{2}, \frac{3i}{4}, \frac{3i}{8}, \ldots.$
- $\left\{\frac{i^{2n}}{n}\right\} = -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots.$

Teorema 1

Dua barisan $\{z_n\}$ dan $\{w_n\}$ dikatakan sama jika dan hanya jika suku-suku yang bersesuaian sama. $z_n = w_n$ untuk semua $n = 1,2,3,\ldots$

Barisan bilangan kompleks terdiri atas dua barisan yaitu sebagai berikut:

1. Barisan Konvergen

Definisi 2

Suatu barisan $\{z_n\}$ disebut konvergen jika terdapat suatu bilangan$z$ sehingga:

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z$$

Teorema 2

Perhatikan barisan $\{z_n\}$ dengan $z_n = x_n + i.y_n$ untuk$n = 1,2,3,\ldots$Maka:

$$\lim_{n \to \infty} z_n = a + bi$$

Jika dan hanya jika:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \;\; dan \;\; \lim_{n \to \infty} y_n = b$$

Contoh 1:

Tentukan barisan $\{ \frac{i^n}{n} \}$ dengan beberapa suku pertamanya.

Jawab:

$$\{ \frac{i^n}{n} \} = \{ i, \frac{-1}{2}, \frac{-i}{2}, \frac{1}{4}, \frac{i}{5}, \frac{-1}{6}, \frac{-i}{7}, \frac{1}{8}, \ldots \}$$

Apabila diperhatikan tampak bahwa barisan ini konvergen ke bilangan 0

$$\lim_{n\to\infty} \frac{i^n}{n} = 0$$

Teorema 3

Suatu barisan yang konvergen, limitnya tunggal

2. Barisan Divergen

Ada 2 ciri utama dari sebuah barisan divergen.

Ciri 1: Bila *n* bertambah besar maka suku-suku barisan tersebut bertambah besar nilai mutlaknya tanpa batas.

Contoh 2:

Nyatakanlah apakah barisan $\left\{n - \frac{1}{n}\right\}$ konvergen atau divergen. Beberapa suku pertamanya : $\left\{0, \frac{3}{2}, \frac{8}{3}, \frac{15}{4}, \ldots\right\}$

Jawab:

Tampak jika *n* makin besar maka barisan tersebut memiliki suku ke-*n* yang juga makin besar. Dengan demikian barisan ini divergen.

Bila kita gunakan rumus pada teorema 2, akan diperoleh hasil limit :

$$\lim_{n\to\infty} n - \frac{1}{n} = \infty - 0 = \infty \ \rightarrow \text{divergen}$$

Ciri 2: Jika suku-suku dari suatu barisan berosilasi di antara dua titik (atau lebih) maka barisan tersebut tergolong barisan divergen. Barisan berikut meskipun suku-sukunya tidak makin besar menuju tak terhingga tetap saja tergolong divergen, dan dinamakan divergen terbatas (*bounded divergent).*

Contoh: Barisan $\{i^{n}\}$ memiliki suku-suku pertama $\{i, -1, -i, 1, i, -i, 1, \ldots\}$. Tampak suku-sukunya berosilasi di titik $i, -1, -i, dan\, 1$. Berarti barisan ini divergen.

B. Deret Bilangan Kompleks

1. Deret Tak Hingga

Definisi 3

Deret yang banyaknya suku tak terbatas disebut deret tak hingga,

notasi: $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$

Teorema 4

Deret $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ dikatakan konvergen ke S jika barisan $\{S_n\}$ konvergen ke S, yaitu $lim_{n\to\infty} S_n = S$, selainnya deret dikatakan divergen.

Contoh:

1. Barisan $\left\{\frac{5i}{2^n}\right\} = 5i\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots. + \frac{1}{2^n} + \ldots\right)$

   dibentuk deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5i}{2^n}$

   Maka $lim_{n\to\infty} S_n$ konvergen ke $5i$

2. Deret $\sum_{n=1}^{\infty} -1^{n-1}(i) = i - i + i - i + i - i + \cdots$,

   S_n tidak mempunyai limit, maka deret divergen

3. Deret aritmatika

   $S_n = \frac{1}{2} n\,(a + Un) = \frac{1}{2} n[2a + (n - 1)\,b]$

   $\left.\begin{array}{l} \text{Jika a} \neq 0 \\ \quad\; \text{b} \neq 0 \end{array}\right\} \to \lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$

   Deret tidak konvergen (divergen)

4. Deret geometri

   $S_n = a.\frac{1-r^n}{1-r}$, $r \neq 0$ dan $a \neq 0$

Untuk $|r| < 1$, $\lim_{m \to \infty} Sn = \frac{a}{1-r}$ → deret konvergen

Untuk $|r| > 1$, $\lim_{m \to \infty} Sn = \pm\infty$ → deret konvergen

Untuk $|r| = 1$, $\lim_{m \to \infty} Sn$ = tak tentu → deret konvergen

a. Sifat-sifat deret tak hingga

1) Jika deret $S_n = \sum_1^\infty z_n$ konvergen maka $\lim_{n \to \infty} z_n = 0$ (sebaliknya tidak berlaku)
2) Jika deret $S_n = \sum_1^\infty z_n$, $\lim_{n \to \infty} z_n \neq 0$, maka deret divergen (akibat logis dari (1))
3) Jika deret $S_n = \sum_1^\infty z_n$, $z_n \geq 0$ dan mempunyai batas atas maka deretnya konvergen.

Untuk menyelidiki kekonvergensian suatu deret dapat digunakan "uji banding", yaitu membandingkan deret tersebut yang telah diketahui kekonvergensiannya.

Ada tiga macam deret pembanding ;

1) Deret geometri : $\sum_1^\infty ar^{n-1}$ → $|r| < 1$, konvergen
   $|r| \geq 1$, divergen
2) Deret hiperharmonis : $\sum_1^\infty \frac{1}{n^k}$ → $k > 1$, konvergen
   $k \leq 1$, divergen

   dibuktikan dengan kondensasi : $2^n \,.\, U_{(2^n)}$
3) Deret Bertrand : $\sum_1^\infty \frac{1}{n(\ln n)^k}$, jika $k > 1$→ konvergen, $k \leq 1$ → divergen

Prinsip/cara penggunaan deret banding;

1) V_n = deret pembanding, U_n = deret yang diselidiki
   a) Jika V_n konvergen
      Sedangkan $0 < U_n < V_n$, maka U_n konvergen

b) Jika V_n divergen

Sedangkan $0 < V_n < U_n$ maka U_n divergen

2). Jika dipenuhi: (i). $U_n > 0$ dan $V_n > 0$

(ii). $lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = L \neq 0$

Maka U_n dan V_n keduanya konvergen atau keduanya divergen.

b. Uji konvergensi deret tak hingga

Untuk menyelidiki konvergensi suatu deret kecuali dengan membandingkan deret-deret lain yang sudah jelas konvergensinya, dapat juga dilakukan dengan pengujian (tes) terhadap dirinya sendiri yang disebut "kriteria konvergensi" atau "tes konvergensi". Ada banyak tes konvergensi di antaranya;

1) Uji rasio (uji pembanding)

Uji rasio ini berlaku untuk deret dengan suku-suku positif, yaitu membandingkan suku ke (n+1) dengan suku ke-n,

Teorema 5

Deret U_n dengan suku dan tidak negatif

Jika $\sum_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = L$, maka:

a. $L < 1 \to$ deret konvergen
b. $L > 1 \to$ deret divergen
c. $L = 1 \to$ didekati dari atas $\to$ deret divergen
   didekati dari bawah $\to$ tak ada keputusan

2) Uji Akar

Teorema: Deret U_n, dengan suku-suku tidak negatif

Jika $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n}$ = L, maka:

a. $L < 1 \rightarrow$ deret konvergen
b. $L > 1 \rightarrow$ deret divergen
c. $L = 1 \rightarrow$ uji gagal

3) Uji Schlomilch
Teorema: Deret (U_n), dengan suku-suku tidak negatif
Jika $lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{U_{n+1}}$ = L, maka :
a. $L > 1 \rightarrow$ deret konvergen
b. $L < 1 \rightarrow$ deret divergen

Catatan: Uji Schlomilch ini hanya jika tes de Alembert gagal, yaitu bila
$lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{U_{n+1}} = 1$ dan pendekatan dari bawah.

4) Uji Raobe
Teorema: Deret (U_n), dengan suku-suku tidak negatif
Jika $lim_{n\to\infty} n\left[1 - \frac{U_{n+1}}{U_n}\right]$ = L, maka :
a. $L > 1 \rightarrow$ deret konvergen
b. $L < 1 \rightarrow$ deret divergen
c. $L = 0 \rightarrow$ didekati dari bawah $\rightarrow$ deret divergen

5) Uji Integral
Misalkan deret U_n, dengan $U_n \geq 0$, $\forall n$, maka $\sum_{I}^{\infty} U_n$ dan $\int_1^{\sim} f(x)dx$ kedua-duanya konvergen atau kedua-duanya divergenseperti dalam deret bilangan riil, kekonvergenan deret $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ dapat diuji dengan beberapa uji kekonvergenan berikut.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0 \Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ divergen.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergen $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen mutlak.

b. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen dan $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ divergen $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen bersyarat.

c. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen mutlak $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen.

7) Uji Banding

$z_n \leq b_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen.

$a_n \leq z_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ divergen.

8) Deret Geometri

Bentuk umum : $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots$

Jika $|q| < 1$ maka deret konvergen.

Jika $|q| \geq 1$ maka deret divergen.

9) Deret p

Bentuk umum : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$

Jika $p < 1$ maka deret konvergen.

Jika $p \geq 1$ maka deret divergen.

3. Deret Taylor dan Deret Maclaurin

Dalam matematika, Deret Taylor adalah representtasi fungsi matematika sebagai jumlah tak hingga dari suku-suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut di suatu titik. Deret ini dapat dianggap sebagai limit polinomial Taylor. Deret Taylor mendapat nama dari matematikawan Inggris, Brook Taylor. Bila deret tersebut terpusat di titik nol, deret tersebut dinamakan sebagai Deret Maclaurin, dari nama matematikawan Skotlandia Colin Maclaurin

Definisi 4

Deret Taylor dari sebuah fungsi riil f(x) yang terdiferensialkan tak hingga dalam sistem bilangan riil a adalah deret pangkat

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

0

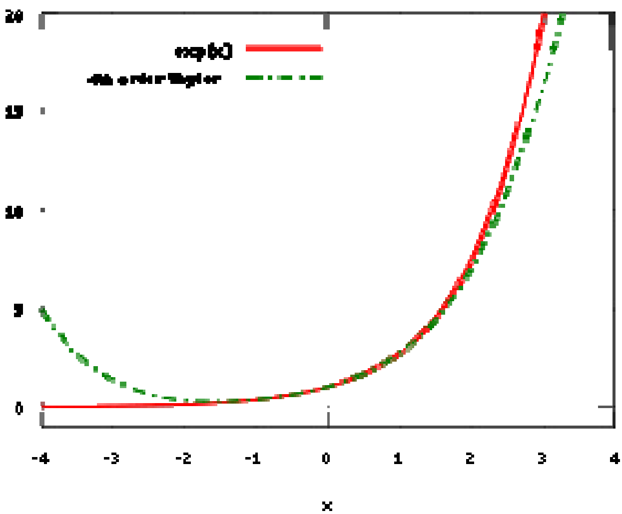
Dalam bentuk lebih ringkas dapat dituliskan sebagai:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

dengan n! melambangkan faktorial n dan $f^{(n)}(a)$ melambangkan nilai dari turunan ke-n dari f pada titik a. Turunan ke-0 dari f didefinisikan sebagai f itu sendiri, dan $(x - a)^0$ dan 0! didefinisikan sebagai 1.

Dalam kasus khusus di mana a = 0, deret ini disebut juga sebagai Deret Maclaurin.

Contoh: Grafik *f(x)* = e^x dan grafik dengan pendekatan Deret Maclaurin untux x = 0 seperti di bawah ini :



Gambar 1:
Fungsi f(x) = e^x dan bentuk Deret Maclaurin

Untuk fungsi kompleks *f(z)* yang terdiferensialkan pada titik z_0, maka Deret Taylor dirumuskan sebagai berikut:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

dengan $a_{n=} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Sehingga:
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Deret Maclaurin adalah Deret Taylor dengan pusat $z_0 = 0$, sehingga:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(0)}{n!}(z)^n$$

a. Beberapa Deret Taylor Khusus

1) Deret Khusus 1

Diketahui suatu fungsi: $f(z) = \frac{1}{1-z}$.

Selanjutnya, kita akan mencari Deret Taylor dan Maclaurin fungsi ini. Setelah fungsi f(z) diketahui, kita harus mencari turunannya, lalu diformulasikan pola dari semua turunan.

Untuk fungsi *f (z)* tersebut di atas:

$f(z) = (1-z)^{-1} \rightarrow f'(z) = -1\,(1-z)^{-2}\,(-1) = \frac{1}{(1-z)^2}$

$f'(z) = (1-z)^{-2} \rightarrow f''(z) = -2\,(1-z)^{-3}\,(-1) = \frac{1}{(1-z)^3}$

$f''(z) = (1-z)^{-3} \rightarrow f'''(z) = -3\,(1-z)^{-4}(-1) = \frac{1}{(1-z)^4}$

Dari penjabaran di atas, maka dapat disimpulkan bahwa:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$$

Maka

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{n!}{(1-z)^{n-1}}\right)}{n!} (1-z_0)^n$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(1-z)^{n+1}}$$

Oleh karena itu, apabila ingin ditentukan Deret Taylor dari fungsi *f(z)* di atas pada titik $z_0 = i$ maka yang harus dilakukan adalah melakukan substitusi $z_0 = i$ ke dalam deret pangkat, sehingga:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}$$

Perlu diperhatikan bahwa pengubahan fungsi analitik *f(z)* ke dalam bentuk deret Taylor hanya berlaku dalam batas-batas keanalitikan *f(z)*. Dalam kasus ini, *f(z)* tidak analitik pada $z=1$

Berikutnya kita akan menentukan Deret Maclaurin dari fungsi *f(z)* tadi. yakni dengan melakukan substitusi $z_0 = 0$ pada deret pangkat sehingga menjadi:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-0)^n}{(1-0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

2) Deret Khusus 2

Diketahui f (z) = e^z

Seperti langkah–langkah pada kasus sebelumnya, kita terapkan juga kali ini .

f(z) = $e^z \rightarrow f'(z) = e^z \rightarrow f''(z) = e^z \rightarrow f'''(z) = e^z$

maka dapat disimpulkan: $f^n(z) = e^z$

Sehingga dengan menggunakan Deret Taylor diperoleh:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{z_0}}{n!}(z - z_0)^n$$

3) Deret Khusus 3

Diketahui f (z) = sin (z) $\rightarrow f$ (0) = 0

Maka: f ' (z) = cos (z) $\rightarrow f$ ' (0) = 1

f " (z) = - sin (z)

$\rightarrow f$ " (o) = 0

f "' (z) = - cos (z)

$\rightarrow f$ " (0) = -1

$f^{(4)}$ (z) = sin (z)

$\rightarrow f^{(4)}$ (0) = 0

$f^{(5)}$ (z) = cos (z)

$\rightarrow f^{(5)}$ (0) = 1

Jika disusun secara manual maka Deret Mac Laurin untuk f (z) = sin (z) :

sin (z) = $f(0) + \frac{f'\,(0)}{1!}.z^1 + \frac{f''\,(0)}{2!}.z^2 + \frac{f'''\,(0)}{3!}.z^3 + \frac{f^{(4)}\,(0)}{4!}.z^4 + \frac{f^{(5)}\,(0)}{5!}.z^5 + \ldots.$

sin (z) = $0 + \frac{1}{1}.z + \frac{0}{2}.z^2 + \frac{-1}{3!}.z + \frac{0}{4!}.z^4 + \frac{1}{5}.z^5 + \cdots$

$$sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots.$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5-11)$$

4. Deret Laurent dan Integral Residu

a. Integral Residu

Tujuan dari integral residu adalah untuk mencari hasil dari integral $\oint_C f(z)dz$, yakni integral dari fungsi $f(z)$ pada kurva tertutup C. Hasil integral tersebut hanya ada pada dua kemungkinan berikut ini:

Jika $f(z)$ analitik di dalam atau pada kurva C maka hasil integral ini sama dengan nol.

Jika $f(z)$ memiliki singularitas (ada *pole*) pada titik (misalnya $(z = z_0)$, sementara di daerah lain (tetap di dalam atau pada kurva C) bersifat analitik, maka $f(z)$ dapat dinyatakan menjadi deret Laurent, berikut ini:

$$\mathrm{f(z)}=\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{a_n(z\text{-}z_0)^n}+\frac{\mathrm{b_1}}{\mathrm{z\text{-}z_0}}+\frac{\mathrm{b_2}}{\mathrm{(z\text{-}z_0)^2}}+\frac{\mathrm{b_3}}{\mathrm{(z\text{-}z_0)^3}}+\ldots$$

Maka residu dari fungsi $f(z)$ adalah koefisien dari $\frac{1}{z-z_0}$ dalam hal ini b_1. Dituliskan dalam bentuk:

$$b_1 = Res_{z=z_0} f(z)$$

b. Residu untuk *Simple Poles*

Simple poles adalah *pole* atau titik singular dengan orde satu. Ada dua rumus untuk mencari residu dari fungsi $f(z)$ yang memiliki *simple poles*, yaitu:

$$Res_{z=z_0} f(z) = b_1 = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Misalkan fungsi $f(z)$ dapat dinyatakan dalam bentuk $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ dengan $p(z_0) \neq 0$ dan $q(z)$ memiliki *simple zero* pada $z - z_0$ maka:

$$Res_{z=z_0} f(z) = Res_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)}{q'(z)}$$

Jika $q(z)$ memiliki *simple zero* ini berarti $f(z)$ memiliki *simple pole*.

c. Residu pada Poles Berorde Banyak

Misalkan fungsi $f(z)$ memiliki *pole* berorde n, maka untuk mencari residunya, digunakan rumus berikut:

$$Res_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)] \right\}$$

Contoh:

Tentukanlah residu pada semua titik singular (*poles*) dari fungsi berikut ini:

1) $f(z) = \frac{4}{1+z^2}$
2) $f(z) = \frac{\cos z}{z^4}$
3) $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}$

Penyelesaian:

1) $f(z) = \frac{4}{1+z^2}$ Bila kita uraikan, maka fungsi ini akan menjadi

$$f(z) = \frac{4}{1+z^2} = \frac{4}{(z+i)(z-i)}$$

Sehingga dihasilkan $z_0 = -i$ (orde 1/*simple pole*)

$z_0 = i$ (orde 1 / *simple pole*)

$p(z) = 4, q(z) = z^2 + 1,\ q'(z) = 2z$

Dengan menggunakan rumus berikut diperoleh:

$$Res_{z=z_0}\, f(z) = Res_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)}{q'(z)}$$

$$Res_{z=-i} \frac{4}{1+z^2} = Res_{z=-i} \frac{4}{2\,z} = \frac{4}{2\,(-i)}$$

$$= -2i$$

$$Res_{z=i} \frac{4}{1+z^2} = Res_{z=i} \frac{4}{2\,z} = \frac{4}{2\,(i)} = 2i$$

2) $f(z) = \frac{cos\, z}{z^4}$

Pole fungsi di atas adalah $z_0 = 0$ dan orde 4. Maka residu fungsi tersebut, yaitu:

$$Res_{z=z_0}\, f(z)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)] \right\}$$

$$Res_{z=0} \frac{coz\, z}{z^4}$$

$$= \frac{1}{(4-1)!} \lim_{z \to 0} \left\{ \frac{d^3}{dz^3} \left[z^4 \frac{cos\, z}{z^4} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{3!} \lim_{z \to 0} \left\{ \frac{d^3}{dz^3} [\cos z] \right\}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{z \to 0} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} [-\sin z] \right\}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{z \to 0} \left\{ \frac{d}{dz} [-\cos z] \right\}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{z \to 0} (\sin z) = 0$$

Jadi, $Res_{z=0} \frac{coz\, z}{z^4} = 0$

3) $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2}$

Berarti memiliki dua buah *pole*s, yaitu:

$z_0 = 1$ (orde atau $n = 2$) dan $z_0 = -1$ (orde atau $n = 2$)

Dengan menggunakan rumus berikut diperoleh:

$$Res_{z=1} \frac{1}{(z^2-1)^2}$$

$$= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 1} \left\{ \frac{d}{dz} \left[(z - 1)^2 \frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2} \right] \right\}$$

$$= \lim_{z\to 1} \left\{ \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(z+1)^2} \right] \right\} = \lim_{z\to 1} \left\{ \frac{d}{dz} \left[\frac{-2}{(z+1)^3} \right] \right\}$$

$$= -\frac{2}{2^3} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$Res_{z=-1} \frac{1}{(z^2-1)^2}$$

$$= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to -1} \left\{ \frac{d}{dz} \left[(z + 1)^2 \frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2} \right] \right\}$$

$$= \lim_{z\to -1} \left\{ \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(z-1)^2} \right] \right\}$$

$$= \lim_{z\to -1} \left\{ \frac{d}{dz} \left[\frac{-2}{(z-1)^2} \right] \right\}$$

$$= -\frac{2}{(-2)^3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

d. Penggunaan Residu dalam Integral Kompleks

Apabila lintasan tertutup C di dalam daerah D memuat satu atau lebih titik singular (*pole*), maka integral sepanjang lintasan tertutup C dapat ditentukan menggunakan teorema berikut.

Teorema 6

Residu Cauchy

Jika f analitik di dalam dan pada lintasan tertutup C yang berarah positif kecuali di titik singular terasing $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ maka

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \times \sum_{j=1}^{n} Res_{z=z_j} f(z)$$

Tentunya pole yang berpengaruh terhadap integral tersebut adalah *pole* yang berada di dalam atau pada kurva C. Kurva C yang dibahas di sini adalah kurva tertutup dengan arah pergerakan berlawanan arah jarum jam. Jadi, jika ternyata kurva yang diketahui searah dengan jarum jam, maka tinggal diberi tanda negatif saja pada ruas kanan dari rumus di atas.

Contoh

Hitunglah integral berikut dengan menggunakan residu.

1) $\oint_C \tan \pi z \, dz$ dengan $C : |z| = 1$ kurva C berlawanan dengan arah jarum jam.
2) $\oint_C \frac{e^z+z}{z^3-z} dz$ dengan $C : |z| = \frac{1}{2}\pi$ kurva C berlawanan dengan arah jarum jam.

3) $\oint_C \frac{2z^3+z^2+4}{z^4+4z^2} dz$ dengan $C : |z-2| = 4$ searah jarum jam

Penyelesaian:

1) $\oint_C \tan \pi z \, dz$ dengan $C : |z| = 1$

$$\tan \pi z = \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z}$$

Dengan $z_0 = \pm\frac{1}{2}$. $z_0 = \frac{1}{2} z_0 = -\frac{1}{2}$ adalah *pole* yang berorde 1, sehingga:

$p(z) = \sin \pi z$ dan $q(z) = \cos \pi z \rightarrow q'^{(z)} = -\pi \sin \pi z$

$$Res_{z=z_0} f(z) = Res_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)}{q'(z)}$$

$$Res_{z=\frac{1}{2}} \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z} = Res_{z=\frac{1}{2}} \frac{\sin \pi \left(\frac{1}{2}\right)}{-\pi \sin \pi \left(\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{\pi}$$

$$Res_{z=-\frac{1}{2}} \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z} = Res_{z=-\frac{1}{2}} \frac{\sin \pi \left(-\frac{1}{2}\right)}{-\pi \sin \pi \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{\pi}$$

Jika semua residu dari *pole* yang berada di dalam atau pada kurva C telah dihitung, maka tinggal menggunakan rumus residu Cauchy seperti berikut:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \times \sum_{j=1}^{n} Res_{z=z_j} f(z)$$

$$\oint_C \tan \pi z \, dz = 2\pi i \times \left[\left(-\frac{1}{\pi}\right) + \left(-\frac{1}{\pi}\right)\right] = -4i$$

2) $\oint_C \frac{e^z+z}{z^3-z} dz$ dengan $C : |z| = \frac{1}{2}\pi$

$$\frac{e^z + z}{z^3 - z} = \frac{e^z + z}{z(z^2 - 1)} = \frac{e^z + z}{z(z+1)(z-1)}$$

Pole yang dimiliki adalah:

$z_0 = 0 n = 1, z_0 = 1 n = 1,$ dan $z_0 = -1 n = 1$

Ketiga *pole* di atas masih berada di dalam atau pada kurva C yang diminta, sehingga:

$p(z) = e^z + z$

$q(z) = z^3 - z \to q'(z) = 3z^2 - 1$

$$Res_{z=0}\, f(z) = Res_{z=0} \frac{e^z + z}{3z^2 - 1} = \frac{e^0 + 0}{3(0^2) - 1}$$

$$= \frac{1}{-1} = -1$$

$$Res_{z=1}\, f(z) = Res_{z=1} \frac{e^z + z}{3z^2 - 1} = \frac{e^1 + 1}{3(1^2) - 1}$$

$$= \frac{1 + e}{2}$$

$$Res_{z=-1}\, f(z) = Res_{z=-1} \frac{e^z + z}{3z^2 - 1} = \frac{e^{-1} + (-1)}{3(-1^2) - 1}$$

$$= \frac{-1 + e^{-1}}{2}$$

Sehingga integralnya adalah sebagai berikut:

$$\oint_C \frac{e^z + z}{z^3 - z} dz = 2\pi i \times \left[-1 + \frac{1 + e}{2} + \frac{-1 + e^{-1}}{2}\right]$$

$$= 2\pi i \times \left[-1 + \frac{1 + e - 1 + e^{-1}}{2}\right]$$

$$= 2\pi i \times \left[-1 + \frac{e + e^{-1}}{2}\right] = \pi i \times (-2 + e + e^{-1})$$

3) $\oint_C \frac{2z^3+z^2+4}{z^4+4z^2} dz$ dengan $C : |z-2| = 4$ searah jarum jam

$$\oint_C \frac{2z^3+z^2+4}{z^4+4z^2} dz = \oint_C \frac{2z^3+z^2+4}{z^2(z^2+4)} dz$$

$$= \oint_C \frac{2z^3+z^2+4}{z^2(z+2i)(z-2i)} dz$$

Terdapat 3 kutub atau *pole* yaitu : $z_0 = 0$ (orde 2), $z_0 = -2i$ (orde 1), dan $z_0 = 2i$ (orde 1). Karena ketiga kutub tersebut dilingkupi oleh kurva C maka kurva C dibagi menjadi tiga bagian (dengan syarat tiap bagian hanya melingkupi satu kutub).

C_1 yang melingkupi $z_0 = -2i$
C_2 yang melingkupi $z_0 = 0$
C_3 yang melingkupi $z_0 = 2i$

$$\oint_C \frac{2z^3+z^2+4}{z^2(z+2i)(z-2i)} dz$$

$$= \oint_{C1} \frac{2z^3+z^2+4}{z^2(z+2i)(z-2i)} dz$$

$$+ \oint_{C2} \frac{2z^3+z^2+4}{z^2(z+2i)(z-2i)} dz$$

$$+ \oint_{C3} \frac{2z^3+z^2+4}{z^2(z+2i)(z-2i)} dz$$

Selanjutnya dihitung satu per satu:

$\oint_{C1} \frac{2z^3+z^2+4}{z^2(z+2i)(z-2i)} dz,\ z_0 = -2i$ (orde 1) $g_1(z) = \frac{2z^3+z^2+4}{z^2(z-2i)}$

Maka hasil integralnya (searah jarum jam):

$$\oint_{C1} \frac{2z^3 + z^2 + 4}{z^2(z + 2i)(z - 2i)} dz = -2\pi i \times g_1(z_0)$$

$$= -2\pi i \times \frac{2(-2i)^3 + (-2i)^2 + 4}{(-2i)^2((-2i) - 2i)}$$

$$= -2\pi i \times \frac{2\ (8i) + (-4) + 4}{(-4)(-4)} = -2\pi i \frac{16i}{16i} = -2\pi i$$

Kemudian pada kurva C_2 dengan $z_0 = 0$:

$\oint_{C2} \frac{2z^3+z^2+4}{z^2(z+2i)(z-2i)} dz\ z_0 = 0$ (orde 2) ; $g_2(z) = \frac{2z^3+z^2+4}{(z^2+4)}$

Maka hasil integralnya (searah jarum jam):

$$\oint_{C2} \frac{2z^3 + z^2 + 4}{z^2(z + 2i)(z - 2i)} dz$$

$$= \frac{-2\pi i}{(2-1)!} \times g_2{}^{(2-1)}(z_0)$$

$$= -2\pi i\left(g_2(z_0)\right)$$

$$= -2\pi i \left[\frac{(6z^2 + 2z)(z^2 + 4) - (2z)(2z^3 + z^2 + 4)}{(z^2 + 4)^2}\right]$$

$$= -2\pi i \left[\frac{(0)(4) - (0)(4)}{(4^2)}\right] = 0$$

Berikutnya pada kurva C_3 dengan $z_0 = 2i$:

$\oint_{C3} \frac{2z^3+z^2+4}{z^2(z+2i)(z-2i)} dz\ z_0 = 2i$ (orde 1) ; $g_3(z) = \frac{2z^3+z^2+4}{z^2(z+2i)}$

Maka hasil integralnya (searah jarum jam) :

$$\oint_{C3} \frac{2z^3 + z^2 + 4}{z^2(z + 2i)(z - 2i)} dz = -2\pi i \left(g_3(z_0)\right)$$

$$= -2\pi i \left[\frac{2(2i)^3 + (2i)^2 + 4}{(2i)^2(2i + 2i)}\right]$$

$$= -2\pi i \left[\frac{2(-8i) + (-4) + 4}{(-4)(4i)}\right]$$

$$= -2\pi i \frac{(-16i)}{(-16i)} = -2\pi i$$

Maka :

$$\oint_{C} \frac{2z^3 + z^2 + 4}{z^2(z + 2i)(z - 2i)} dz = -2\pi i + 0 - 2\pi i = -4\pi i$$

LATIHAN DAN PENYELESAIAN

1. Tunjukkan bahwa: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$,

2. Selidiki konvergensi deret : $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2 - n + 2}$, suku umum $U_n = \frac{1}{n^2 - n + 2}$

   Jawab:

   Gunakan deret pembanding deret hiperharmonis dengan suku umum $V_n = \frac{1}{n^2}$yang konvergen *(k > 1)*

   $\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2 - n + 2} = 1 \neq 0$

   Jadi: *(U_n)* konvergen.

3. Selidiki konvergensi deret dengan suku umum $U_n = \frac{ln\ n}{n}$

   Jawab:

Deret pembanding dengan suku umum $V_n = \frac{1}{n} \rightarrow$ deret harmonis yang divergen.

Untuk $n \geq 3$ dipenuhi $0 < \frac{1}{n} < \frac{ln\ n}{n}$

Berarti $0 < V_n < U_n$

Karena (V_n) divergen maka (U_n) divergen

4. Selidiki konvergensi deret : $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \rightarrow U_n$ dengan membanding deret

Jawab: dengan membanding deret geometri $\sum_1^\infty \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow V_n$, $r = \frac{1}{2}$ yang konvergen

$U_n V_n$ maka $0 < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{2^{n-1}}$

n ↓ ›1 = ↓ $0 < U_n < V_n$

$n = 2 \rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ karena (V_n) konvergen maka (U_n) konvergen

$n = 3 \rightarrow \frac{1}{9} < \frac{1}{4}$

↓

5. Selidiki lonvergensi daerah : $\sum \frac{(n+1)^n}{n^{n+2}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{In\frac{1}{u_n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} In \frac{In\left[n^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]}{\ln n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{In\frac{1}{u_n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{Inn^2}{\ln n} + \frac{In\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n}{\ln n}\right\}$$

Jawab: $$\lim_{n\to\infty}\frac{In\frac{1}{u_n}}{Inn}=\lim_{n\to\infty} \text{In}\frac{1}{Inn}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=2+\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{n+1}\right)^n}{\ln}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=2+\frac{\ln\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n}{\ln\lim_{n\to\infty} n}=2+\frac{\ln e^{\infty}}{\infty}=2$$

Jadi, $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=2>1\ \rightarrow$ deret konvergen

6. Selidiki konvergensi deret $\sum n^2\left[\frac{3n-1}{3n+1}\right]^n$

Jawab: $$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left[n^{-2}\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^n\right]}{\ln n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2\ln n+\ln\left(1+\frac{3}{3n-1}\right)^n}{\ln n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=-2+\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{3n-1}\right)^n}{\ln n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = -2 + \frac{\ln \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{3n+1}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} \ln n} = -2$$

Jadi, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = -2 < 1 \rightarrow$ deret divergen

7. Selidiki konvergensi deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 - 2n + 3}$

Jawab: Dengan Uji de Alembert gagal, karena $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{U_n}{U_{n+1}} = 1$

didekati dari bawah dengan Schlomilch:

$$\lim_{n\to\infty} \text{n .ln} \frac{U_n}{U_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \quad n\ ln\ \frac{n^2+2}{n^2-2n+3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \text{n .ln} \frac{U_n}{U_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\ ln\left(\frac{n^2+2}{n^2-2n+3}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \text{n .ln} \frac{U_n}{U_{n+1}} = ln\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n-2}{n^2-2n+3}\right)^n = 2$$

Jadi $\lim\limits_{n\to\infty} \text{n .ln} \dfrac{U_n}{U_{n+1}} = 2 > 1 \rightarrow$ deret konvergen

8. Selidiki konvergensi deret dengan suku umum:

$$\text{U}_n = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot .....(2n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot .....(2n-1)}$$

Jawab: $\text{U}_n = \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot .....(2n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot .....(2n-1)}$

Dengan uji de Alembert: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1} = 1$

Didekati dari bawah $\to$ gagal.

Dengan uji Schlomilc : $\lim\limits_{n\to\infty} n.\ ln \frac{U_n}{U_{n+1}}$

$$= \lim_{n\to\infty} n.\ ln\ \frac{2n+1}{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n.\ ln\ \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$$

$$= ln \lim_{n\to\infty} n\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$$

$$= ln\ e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Jadi, $\lim\limits_{n\to\infty} n\ .ln\ \frac{U_n}{U_{n+1}} = \frac{1}{2} < 1 \to$ deret divergen

9. Selidiki deret konvergensi deret $\sum \frac{1}{n^2-3n}$

Jawab: $\mathrm{U}_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2 - 3(n+1)} = \frac{1}{n^2-n-2}$

$$\frac{U_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2-3n}{n\ \ -n-2}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left[1-\frac{U_{n+1}}{U_n}\right] = \lim_{n\to\infty} it\ \mathrm{n}\left[1-\frac{n^2-3n}{n^2-n-2}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left[1-\frac{U_{n+1}}{U_n}\right] = \lim_{n\to\infty} it \text{ n}$$

$$\left[1-\frac{n^2-n-2-n^2+3}{n^2-n-2}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left[1-\frac{U_{n+1}}{U_n}\right] = \lim_{n\to\infty} it \text{ n } \frac{2n^2-2}{n^2-n-2} = 2$$

Jadi $\lim_{n\to\infty} n\left[1-\frac{U_{n+1}}{U_n}\right] = 2 > 1 \rightarrow$ deret Konvergen

10. Selidiki konvergensi deret : $\sum \frac{2n}{2n+1}$

Jawab: $U_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} = \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2n+2}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{2n} =$

$$\frac{2n^2+3n+1}{2n^2+3}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left[1-\frac{U_{n+1}}{U_n}\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[1-\frac{2n^2+3n+1}{2n^2+3n}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left[1-\frac{U_{n+1}}{U_n}\right] = \lim_{n\to\infty} n \frac{-1}{2n^2+3n}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left[1-\frac{U_{n+1}}{U_n}\right] = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2n+3} = 0$$

$\lim_{n\to\infty} n\left[1-\frac{U_{n+1}}{U_n}\right] = 0 \rightarrow$ didekati dari bawah, deret divergen.

11. Selidiki Konvergensi deret : $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}}$

Jawab: diambil $U_n = \dfrac{1}{x \cdot \ln x}$, untuk x > 1 dan $U_n \geq 0$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \int_1^\infty x^{-3} \text{ dx} = \text{-2x}^{-\frac{1}{2}} \Big|_5^\infty = 2$$

$$\text{Berarti } \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}} \text{ dx konvergen}$$

$$\text{Jadi deret } \sum_1^\infty \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}} \rightarrow \text{konvergen}$$

12. Selidiki konvergensi deret : $\displaystyle\sum_5^\infty \frac{1}{n \cdot \ln \cdot n}$

Jawab: diambil fungsi $\dfrac{1}{x \cdot \ln \cdot x}$, sehingga $U_n = \dfrac{1}{x \cdot \ln \cdot x}$

untuk x > 5 dan $U_n \geq 0$

$$\int_5^\infty \frac{1}{x.\ln x} \text{ dx} = \int_5^\infty \frac{1}{\ln x} d(\ln x) = \ln.\ \ln \text{ x}$$

$\Big|_5^\infty = \infty \rightarrow$ divergen

$$\text{Berarti} \int_5^\infty \frac{1}{x.\ln x} \text{ dx} \rightarrow \text{divergen}$$

13. Selidiki konvergensi deret : $\displaystyle\sum_1^\infty (2 + \cos n\pi)^n$

Jawab: $\lim\limits_{n\to\infty} it \sqrt[n]{(2 + \cos n\pi)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \text{n}(2 + \cos \text{n} \quad \pi) = \angle$

Hasil limitnya berubah-ubah antara 1 dan 3, tidak mungkin $\angle$ <1, berarti deret divergen.

14. Selidiki konvergensi deret : $\sum_{1}^{\infty} \frac{9^n}{n^2}$

Jawab: $\lim_{n\to\infty} it \sqrt[n]{\frac{9^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} it \frac{9}{\sqrt[n]{\frac{9^n}{n^2}}} = \frac{9}{1} = 9 > 1 \rightarrow$ jadi divergen

15. Selidiki konvergensi deret : $\sum n^2 \cdot \left(\frac{n-1}{3n-2}\right)^2$

Jawab: $\lim_{n\to\infty} it \sqrt[n]{n^2 \cdot \left(\frac{n-1}{3n+2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} it \sqrt[n]{n^2} \cdot \frac{n-1}{3n+2} = 1 \cdot \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3} < 1 \rightarrow$ jadi konvergen.

16. Tentukan Deret MacLaurin dari $f(z) = \frac{1}{1+z}$ pada $z_0 = 0$

Jawab: Deret MacLaurin berarti pusatnya, $z_0 = 0$

Sebelumnya kita sudah mempunyai deret khusus 1, yaitu:

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Dari bentuk inilah kita menentukan Deret Maclaurin dari $\frac{1}{1+z}$

Perhatikan teknik berikut ini, pasti sangat berguna untuk pengerjaan soal selanjutnya.

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \{(-1).(z)\}^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . z^n$$

Tampak bahwa dilakukan subtitusi *z* dalam deret khusus 1 menjadi (-z) sehingga diperoleh Deret Maclaurin seperti di atas.

17. Tentukan Deret Maclaurin dari $f(z) = \frac{1}{2+4z}$

Kita harus menuliskan bentuk di atas ke dalam bentuk deret khusus. Misalnya kita memilih bentuk berikut ini:

$$\frac{1}{2+4z} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+2z} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . (2z)^n$$

jadi, $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . (2z)^n}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . 2^{n-1} . z^n$$

1) Diketahui *f (z) = sin (z), f (0) = 0*, tulis fungsi *f(z)* dalam bentuk deret Maclaurin

   Jawab:

f' (z) = cos (z)	*f'(0) = 1*
f''(z) = - sin (z)	*f''(0) = 0*
f''(z) = -cos (z)	*f'''(0) = 1*
f^{dv} *(z)= sin (z)*	f^{dv} *(0) = 0*
f^{v} *(z)= cos (z)*	f^{v}*(0)=1* dan seterusnya

   Jika disusun secara manual maka deret Maclaurin untuk *f(z) = sin (z)* *sin(z)*=f(0) +

$$\frac{f'(0)}{1!}.z^1+\frac{f''(0)}{2!}.z^2+\frac{f'''(0)}{3!}.z^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}.z^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}+......$$

sin(z)=0+

$$\frac{1}{1}.z+\frac{0}{2}.z^2+\frac{-1}{3!}.z^3+\frac{0}{4!}.z^4+\frac{1}{5!}.z^5+.................$$

sin(z)=z - $\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+......... \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1).\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)}$................

18. Tentukan deret Maclaurin dari f(z) = $\frac{1}{1+z}$

Jawab:

Deret Maclaurin berarti pusatnya , $z_0 = 0$.

Sebelumnya kita sudah mempunyai deret khusus 1 ,

yaitu *f(z)*= $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

dari bentuk inilah kita menentukan Deret Maclaurin dari perhatikan teknik berikut ini, pasti sangat berguna untuk mengerjakan soal selanjutnya.

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\{(-1).(z)\}^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ ....^n$$

Tampak bahwa dilakukan substitusi z dalam deret khusus menjadi (-z) sehingga diperoleh Deret Maclaurin seperti di atas. Selanjutnya tentukan Deret Maclaurin dari f(z) = $\frac{1}{2+4z}$

Kita harus menuliskan bentuk diatas ke dalam bentuk deret khusus, misalkan kita memilih bentuk berikut ini:

$$\frac{1}{2+4z}=\frac{1}{2}*\frac{1}{1+2z}=\frac{1}{2}*\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.(2z)^n$$

Jadi : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.(2z)^n}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.2^{n-1}.z^n$

19. Tentukan Deret MacLaurin dan Deret Laurent dari $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$

Penyelesaian:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-2)}$$

Titik singular $f(z)$ yaitu $z = 1$ dan $z = 2$.

Dibuat annulus $1 < |z| < 2$, sehingga dapat diperoleh Deret MacLaurin untuk $|z| < 1$ dan deret Laurent untuk $1 < |z| < 2$ dan $|z| > 2$.

a. Deret MacLaurin untuk $|z| < 1$.

$f(z)$ analitik untuk $|z| < 1$, sehingga

$$f(z) = -\frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-z/2}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \qquad , \quad |z| < 1$$

b. Deret Laurent untuk $1 < |z| < 2$.

$f(z)$ analitik untuk $1 < |z| < 2$.

$$f(z) = -\frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-2)}.$$

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right] = -\frac{1}{z}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n\right] \quad , \ \left|\frac{1}{z}\right| < 1$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} \quad , \ 1 < |z|$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right] = -\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right] \quad , \ \left|\frac{z}{2}\right| < 1$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \quad , \ |z| < 2$$

Jadi,

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-2)}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \quad , \ 1 < |z| < 2.$$

c. Deret Laurent untuk $|z| > 2$.

$f(z)$ analitik untuk $|z| > 2$.

$$f(z) = -\frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-2)}.$$

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right] = -\frac{1}{z}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n\right] \quad , \ \left|\frac{1}{z}\right| < 1$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} \quad , \ |z| > 1$$

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{z}\left[\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right]=-\frac{1}{z}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^{n}\right] \quad , \left|\frac{2}{z}\right|<1$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n}}{z^{n+1}} \quad , \ |z|>2$$

SOAL-SOAL

1. Uraikan fungsi f (z) yang diberikan berikut ke dalam deret pangkat di sekitar z_0 yang diberikan dan tentukan jari – jari konvergensinya.
   a) $f(z)=\frac{z}{1+z}$; $z_0=0$
   b) $f(z)=\frac{z^2}{2+z}$; $z_0 = 0$
   c) $f(z)=\frac{1-z}{1+2z}$; z_0 =dan z_0 =1
   d) $f(z)=\frac{1}{z}$; $z_0 = i$ dan$z_0 = 2$
   e) $f(z)=e^{-z}$; $z_0 = 0$
   f) $f(z) = e^{z+1}$; $z_0 = 1$
   g) $f(z)=\frac{(z-1)^2}{z}$ $z_0 = 1$
   h) $f(z)=(z-1)^2.e^{z}$; $z_0 = 1$
2. Uraikan fungsi f *(z)* yang diberikan berikut ke dalam deret pangkat sekitar z_0 yang diberikan dan tentukan jari-jari konvergensinya .

   a. $\frac{z}{1+z}; z_0 = 0$

   b. $\frac{z^2}{2+z}; z_0 = 0$

   c. $\frac{1-z}{1+2z}; z_0 = 0$ dan $z_0 = 2$

d. $\frac{1}{z}; z_0 = i$ dan $z_0 = 2$

e. e^{-z} ; $z_0 = 0$

f. e^{2+1} ; $z_0 = 1$

g. $\frac{(z-1)^2}{z}; z_0 = 1$

h. $(z-1)^2 .e^2$; $z_0 = 1$

i. $\frac{\sin z}{(z-\pi)}; z_0 = \pi$

j. $\frac{1}{(z-i).(z+3)}; z_0 = 0$

- oOo -

DAFTAR PUSTAKA

Agus Prijono, dkk, 2006, *Menguasai Analisis Kompleks dalam Matematika Teknik*, Bandung: Rekayasa Sains.

Ayres, Frank, JR, 1991, *Diferensial dan Integral Kalkulus*, Jakarta, Erlangga (Terjemahan)

Bartle, Robert & Donald R, 2000, *Real Analysis*, NewYork, John Wiley &Sons.

Beck, Mattias, dkk, 2010, *A.First Course in Complex Analysis, Version 1.3*, Departements of Mathematics San Fransisco State University.

Hidayat Sardi, 1989, *Fungsi Kompleks*, Universitas Terbuka, Jakarta: Karunika

Kreyszig, Erwin, 1997. *Advanced Enginering Mathematics*, New York, John Wiley & Sons.

Margha M., Drs. 1982, *Fungsi dengan Peubah Kompleks*, Bandung: Armico

M. Jimmy Hasugian, Agus Prijono, (2006), *Menguasai Analisis Kompleks dalam Matematika Teknik*, Bandung: Rekayasa Sains

M. Rianto Zaki, 2008, *Pengantar Analisis Real 1*. Yogyakarta: UGM.

Murray R. Spiegel, 1981, *Complex Variables*, Singapore, No Craw – Hill Internasional Book Company.

Reade, John B, 2002, *Calculus with Complex Numbers*, Taylor & Francis, London & New York

Ponnusamy, 1995, *Foundations of Complex Analysis*. John Wiley & Sons Pte.Ltd

Purcell, Edwin J, 1987, *Kalkulus dan Geometri Analitis jilid 2* (terjemahan), Bandung: PT. Gelora Aksara Pratama

Spiegel, Murray.R, 1964, *Theory and Problems of Complex Variables*, Schaums Outline Series, Singapore

Spiegel, Muray R, 1974, *Schaum's Outline Of Theory and Problems Of Complex Variables With An Introduction to Conformal Mapping and it Application*, Singapore:McGraw-HillInternasional Book Company.

Spiegel, Muray.R, 1999, *Peubah Kompleks*, Erlangga (Terjemahan)

Suryanto Sukardjono, 2007, *Analisis Real*, Jakarta, Universitas Terbuka. Modul 1 – 9.

- oOo -

BIODATA PENULIS

Penulis lahir di kota sejuk Bukittinggi, Sumatera Barat dan berasal dari keluarga sederhana dan religius. Menyelesaikan S1 di Program Studi Pendidikan Matematika FMIPA IKIP Padang (1993) dan S2 di Jurusan Matematika Institut Teknologi Bandun (1999). Saat ini (2014) penulis sedang studi S3 Universitas Pendidikan Indonesia Bandung

Menjalani profesi sebagai Dosen bermula di STKIP Muhammadiyah Kerinci Jambi (1994-2003). Karena suami bertugas sebagai dosen di Fakultas Hukum Universitas Lancang Kuning Pekanbaru Riau, maka pada tahun 2003 penulis mengajukan pindah ke Universitas Islam Riau melalui Kopertis Wilayah X Padang. Alhamdulillah pada tahun 2003 penulis diterima menjadi dosen di Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Islam Riau (UIR) hingga sekarang. Satu tahun setelah diterima di UIR, penulis dipercaya menjadi Ketua Program Studi untuk periode 2004 s/d 2008 dan diangkat lagi menjadi Ketua Program Studi merangkap Ketua Jurusan PMIPA periode 2008 s/d 2012. Lulus menjadi dosen profesional dengan mendapat sertifikat pendidik pada tahun 2010. Pernah menjadi Tim Lembaga Hibah Kompetisi di lingkungan FKIP UIR (2010-2012). Menerima Piagam Penghargaan Ketua Prodi Berprestasi di lingkungan Kopertis

Wilayah X di Padang pada tahun 2011. Sebagai dosen, sudah menulis di jurnal-jurnal penelitian, seperti di Jurnal Ilmu Terapan (JIT), Akademika (Kopertis Wilayah X Padang), Mathematics Paedagogic Universitas Negeri Asahan (UNA) Medan, Jurnal Pendidikan Matematika dan Sains (JPMS) UNY Yogyakarta, Perspektif (FKIP UIR) dan alhamdulillah mendapat dana hibah penelitian fundamental dikti selama 2 tahun, yaitu tahun 2012 dan 2013. Juga beberapa kali menjadi pemakalah pada seminar nasional. Pangkat dan jabatan terakhir adalah Pembina (IVa) dan Lektor Kepala. Motto hidup : selalu berbuat yang terbaik untuk diri sendiri dan orang lain dan pantang menyerah, selalu berdoa dan berusaha. Hari ini harus lebih baik dari kemarin. Man Jadda Wa Jadda.

- oOo -