

BUKU AJAR KALKULUS INTEGRAL

Berbasis Kemampuan Berfikir
Kritis Matematis

Dr. Hj. Zetriuslita, S. Pd., M. Si.
Rezi Ariawan, S.Pd., M. Pd.

Integral

$$\int_{-2}^2 |x| dx = \int_{-2}^0 -x dx + \int_0^2 x dx$$


PRESS

Buku Ajar Kalkulus Integral

**“Berbasis Kemampuan Berpikir Kritis
Matematis”**

Penulis:

Dr. Hj. Zetriuslita, S. Pd., M. Si.

Rezi Ariawan, S. Pd., M. Pd.

Penerbit:



**UNIVERSITAS ISLAM RIAU
PRESS**

BUKU AJAR KALKULUS INTEGRAL
“Berbasis Kemampuan Berpikir Kritis Matematis”

Penulis:

Dr. Hj. Zetriuslita, S. Pd., M. Si.
Rezi Ariawan, S. Pd., M. Pd.

Editor

Hayatun Nufus, S. Pd., M. Pd.

Penyunting

Zafrullah, S. Pd.

Penerbit

UIR PRESS Universitas Islam Riau

Redaksi

Gedung Rektorat Universitas Islam Riau Lantai 3
Jl. Kaharuddin Nasution No. 113
Marpoyan 28284, Kota Pekanbaru, Riau, Indonesia
Telp : (0761) 674674
Fax : (0761) 674834
Email: uirpress@uir.ac.id

Cetakan Pertama, Februari 2022

Hak Cipta dilindungi undang-undang;

Dilarang keras mengutip, menjiplak, memfotokopi atau memperbanyak dalam bentuk apa pun, baik sebagian atau keseluruhan isi buku ini serta memperjualbelikannya tanpa izin tertulis dari Penerbit UIR Press.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji dan syukur kehadiran Allah SWT yang telah memberikan nikmat kesehatan dan kesempatan sehingga penyusunan ***Buku Ajar Kalkulus Integral Berbasis Kemampuan Berpikir Kritis Matematis*** ini dapat diselesaikan dengan baik dan sesuai dengan waktu yang diharapkan.

Tujuan penyusunan ***Buku Ajar Mata Kuliah Kalkulus Integral Berbasis Kemampuan Berpikir Kritis Matematis*** ini adalah sebagai bahan panduan perkuliahan bagi mahasiswa yang mengambil mata kuliah Kalkulus Integral pada Program Studi Pendidikan Matematika atau bagi mereka yang berminat memperdalam wawasan tentang Kalkulus Integral. ***Buku Ajar Mata Kuliah Kalkulus Integral Berbasis Kemampuan Berpikir Kritis Matematis*** ini merupakan buku ajar yang kami hasilkan dari beberapa riset yang telah kami lakukan, diantaranya yaitu:

1. Profil kemampuan berpikir kritis matematis mahasiswa dalam menyelesaikan masalah matematika (kalkulus 2) berdasarkan tingkat kemampuan akademik. (Tahun 2014-2015: Hibah Penelitian Fundamental Dikti)
2. Pengembangan Bahan Ajar Berbasis *Problem Based Learning* (PBL) untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Kritis Matematis Mahasiswa Pada Materi Luas Daerah Bidang Datar Dan Volume Benda Putar (Tahun 2015-2016: Hibah Penelitian Fundamental Dikti)

3. Pengembangan Bahan Ajar Teknik Integrasi Pada Mata Kuliah Kalkulus Integral *Berbasis Problem Based Learning* (Tahun 2017: Penelitian Internal UIR)
4. Analisis Kesalahan Mahasiswa Dalam Menyelesaikan Soal Kemampuan Berpikir Kritis Pada Mata Kuliah Kalkulus Integral Menurut Teori *Newman Error Analysis* Ditinjau Berdasarkan Perbedaan Gender Dan *Habid's Of Mind* (Tahun 2018: Penelitian Internal UIR)
5. Peningkatan Kemampuan Berpikir Kritis Matematis Mahasiswa Ditinjau Berdasarkan Level Kemampuan Akademik, Gaya Kognitif Dan *Curiosity* Matematis Melalui Penggunaan Bahan Ajar Kalkulus Integral *Berbasis Problem Based Learning* (Tahun 2019: Penelitian Internal UIR)
6. Hubungan Gaya Kognitif Dan *Habits Of Mind* Dengan Kemampuan Berpikir Kritis Matematis (Tahun 2019: Penelitian Internal UIR)
7. Pengaruh Pembelajaran Berbantuan Qoogle Classroom Pada Mata Kuliah Kalkulus Integral Terhadap Kemampuan Literasi dan Quriosity Matematis Mahasiswa (Tahun 2021: Penelitian Internal UIR).

Buku Ajar Mata Kuliah Kalkulus Integral Berbasis Kemampuan Berpikir Kritis Matematis ini terdiri sebanyak 6 Bab. Bab 1 membicarakan terkait pengantar dasar integral, Bab 2 tentang integral tak tentu; Bab 3 tentang teknik integrasi; Bab 4 tentang aplikasi integral tak tentu; Bab 5 tentang teorema dasar

integral tentu; Bab 6 tentang aplikasi integral tentu. Pada Bab 2 – 6 disajikan contoh soal dan latihan yang di susun berdasarkan indikator kemampuan berpikir kritis matematis yaitu: Kemampuan mengidentifikasi dan menjustifikasi konsep, yaitu kemampuan memberikan alasan terhadap penguasaan konsep; Kemampuan menghubungkan, yaitu kemampuan menemukan fakta, data, konsep dan menghubungkan-nya; Kemampuan meng-analisis, yaitu kemampuan memilih dan menentukan informasi yang penting dari soal yang diberikan; Kemampuan meng-evaluasi, yaitu kemampuan menemukan dan mendeteksi hal-hal yang penting dari konsep yang diberikan; Kemampuan memecahkan masalah, yaitu kemampuan memahami masalah, memilih strategi dan melaksanakan penyelesaian dari masalah yang diberikan serta dilengkapi dengan rangkuman.

Dalam pembuatan ***Buku Ajar Mata Kuliah Kalkulus Integral Berbasis Kemampuan Berpikir Kritis Matematis*** ini, penyusun telah mendapatkan bantuan, saran, dan dorongan dari teman-teman yang tidak dapat disebutkan satu persatu. Oleh sebab itu, seyogyanyalah penyusun mengucapkan ribuan terima kasih yang tidak terhingga kepada teman-teman terlibat.

Penyusun menyadari bahwa ***Buku Ajar Mata Kuliah Kalkulus Integral Berbasis Kemampuan Berpikir Kritis Matematis*** ini masih jauh dari apa yang diharapkan. Oleh sebab itu, saran dan kritikan dari mahasiswa sebagai pengguna maupun dari

pembaca lainnya sangat diharapkan demi perbaikan dimasa yang akan datang.

Akhirukalam semoga bermanfaat bagi para pembaca

Pekanbaru, Februari 2022

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	i
DAFTAR ISI.....	v
BAB 1 Pengantar Dasar Integral	1
1.1. Pentingnya Mempelajari Integral	3
1.2. Tokoh Penting dalam Integral	5
1.3. Penulisan Integral	10
BAB 2 Integral Tak Tentu.....	11
2.1. Defenisi Integral Tak Tentu.....	13
2.2. Aturan Dasar Integral Tak Tentu	16
Contoh Soal	18
Rangkuman	24
Latihan	27
BAB 3 Teknik Integrasi	30
3.1. Teknik Integrasi dengan Menggunakan Substitusi.....	32
3.1.1. Teknik Integrasi dengan Substitusi Sederhana.	32
Contoh Soal	32
Rangkuman	37
Latihan	38
3.1.2. Teknik Integrasi dengan Substitusi Fungsi	
Aljabar	40
3.1.2.1 Integran Memuat Persamaan Kuadrat	40
Contoh Soal	40
3.1.2.2 Integran Memuat Pangkat Pecahan	
dari Bentuk $a + bx$	45
Contoh Soal	45
3.1.2.3 Integran Memuat Pangkat Pecahan	
dari Bentuk $a + bx^n$	50
Contoh Soal	50
Rangkuman	53
Latihan	54

3.2. Teknik Integral Parsial	57
3.2.1. Integrasi Parsial dengan Rumus	57
3.2.2. Integrasi Parsial dengan Metode Tabulasi	58
Contoh Soal	60
Rangkuman	64
Latihan	66
3.3. Teknik Integrasi dari Fungsi Trigonometri	68
3.3.1. Integral Trigonometri dalam Bentuk	
$\int \sin^n u \, du$ atau $\int \cos^n u \, du$	75
Kasus 1: untuk n ganjil	75
Kasus 2: untuk n genap	77
Contoh Soal	78
3.3.2. Integral Trigonometri dalam	
Bentuk $\int \sin^m u \cos^n u \, du$	81
Kasus 1 : untuk m atau n ganjil	81
Kasus 2: untuk m dan n ganjil	82
Kasus 3: untuk m dan n genap	82
Contoh Soal	83
3.3.3. Integral Trigonometri dalam	
Bentuk $\int \tan^n u \, du$ dan $\int \cot^n u \, du$	93
Contoh Soal	94
3.3.4. Integral Trigonometri dalam Bentuk	
$\int \sin mx \cdot \cos nx \, dx$, $\int \sin mx \cdot \sin nx \, dx$,	
dan $\int \cos mx \cdot \cos nx \, dx$	100
Contoh Soal	100
Rangkuman	105
Latihan	110
3.4. Teknik Integrasi dengan Substitusi Trigonometri	113
3.4.1. Integral Memuat Bentuk $\sqrt{a^2 - u^2}$,	
dengan $a > 0$	113
Contoh Soal	114
3.4.2. Integral Memuat Bentuk $\sqrt{a^2 + u^2}$,	
dengan $a > 0$	115
Contoh Soal	115
3.4.3. Integral Memuat Bentuk $\sqrt{u^2 - a^2}$,	
dengan $a > 0$	116
Contoh Soal	117

Rangkuman	123
Latihan	125
3.5. Teknik Integrasi Fungsi Rasional	127
3.5.1. Integral dalam Bentuk Linier Tak Berulang	127
Contoh Soal	128
3.5.2. Integral dalam Bentuk Linier Berulang	129
Contoh Soal	129
3.5.3. Integral dalam Bentuk Kuadrat Tak Berulang .	132
Contoh Soal	132
3.5.4. Integral dalam Bentuk Kuadrat Berulang	133
Contoh Soal	133
Rangkuman	139
Latihan	142
3.6. Teknik Integral Fungsi Eksponensial Asli dan	
Logaritma Natural.....	144
3.6.1. Pengantar Fungsi Eksponensial dan Logaritma	144
3.6.2. Defenisi Integral Fungsi Eksponensial	
dan Logaritma	145
Contoh Soal	145
Rangkuman	151
Latihan	152

BAB 4 Aplikasi Integral Tak Tentu 154

4.1. Penyelesaian Persamaan Differensial	156
Contoh Soal	156
4.2. Penentuan Persamaan Kurva	158
Contoh Soal	158
4.3. Menentukan Gerak Suatu Benda	160
Contoh Soal	161
Rangkuman	165
Latihan	166

BAB V Teorema Dasar Integral Tentu 168

5.1. Notasi Jumlah dan Sigma	170
5.1.1 Defenisi Notasi Sigma	170
5.1.2 Sifat – Sifat Notasi Sigma	171

Contoh Soal	172
Rangkuman	176
Latihan	177
5.2. Integral Tentu	179
5.2.1 Defenisi Integral Tentu	179
Contoh Soal	180
5.2.2 Teorema Dasar Integral Tentu	183
Contoh Soal	184
5.2.3 Sifat – Sifat Integral Tentu	188
Contoh Soal	190
Rangkuman	199
Latihan	202

BAB VI Aplikasi Integral Tentu205

6.1. Pengantar Dasar Aplikasi Integral Tentu	207
Rangkuman	212
Latihan	213
6.2. Luas Daerah Pada Bidang	214
6.2.1. Luas Daerah di atas atau di bawah sumbu x atau Luas Daerah yang dibatasi oleh Kurva $y = f(x)$, sumbu x an garis $x = a$ dan $x = b$	214
Contol Soal	223
6.2.2. Luas Daerah yang di batasi oleh Kurva $x = f(y)$, sumbu y Garis $y = a$ dan $y = b$	227
Contoh Soal	228
6.2.3. Luas Bidang Datar Antara Dua Kurva	234
Contoh Soal	239
Rangkuman	245
Latihan	249
6.2. Volume Benda Putar	252
6.2.1. Metode Cakram	254
Contoh Soal	260
6.2.2. Metode Cincin	264
Contoh Soal	270
Rangkuman	274
Latihan	275

Daftar Pustaka

CAPAIAN PEMBELAJARAN LULUSAN	
CP - S9	Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri
CP – S13	Berprilaku jujur, tegas dan manusiawi
CP – KU2	Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur
CP - KU7	Mampu bertanggungjawab atas pencapaian hasil kerja kelompok dan melakukan supervisi serta evaluasi terhadap penyelesaian pekerjaan yang ditugaskan kepada pekerja yang berada di bawah tanggungjawabnya
CP - KU9	Mampu mendokumentasikan, menyimpan, mengamankan, dan menemukan kembali data untuk menjamin kesahihan dan mencegah plagiasi
CP – PA1	Menguasai konsep dan prinsip didaktik-pedagogis matematika serta keilmuan matematika untuk merencanakan pembelajaran inovatif berbasis IPTEK
CP – PA4	Menguasai konsep matematika yang diperlukan untuk melaksanakan pembelajaran di satuan pendidikan dasar dan menengah
CP – KKA4	Mampu mengaplikasikan konsep matematika yang diperlukan untuk melaksanakan pembelajaran di satuan pendidikan dasar dan menengah
CP – KKA5	Mampu mengaplikasikan konsep matematika yang diperlukan untuk studi ke jenjang berikutnya

CAPAIAN PEMBELAJARAN MATA KULIAH
Setelah menyelesaikan mata kuliah ini dalam satu semester, mahasiswa diharapkan:
1. Menelaah definisi dan aturan integral tak tentu.
2. Menggunakan rumus dasar integral tak tentu dalam menyelesaikan permasalahan hitung integral.
3. Menelaah definisi dan aturan Integral fungsi transenden (integral fungsi logaritma, integral fungsi eksponensial)
4. Menggunakan aturaan integral fungsi transenden dalam penyelesaian masalah.
5. Menelaah definisi dan aturan Integral fungsi trigonometri

6. Menggunakan aturan integral fungsi trigonometri dalam penyelesaian masalah.
7. Membedakan integral fungsi logaritma dan eksponensial
8. Menyatakan integral tak tentu dari fungsi logaritma dan eksponensial
9. Menelaah berbagai macam teknik integrasi (substitusi, parsial, substitusi trigonometri, substitusi aljabar, dan fungsi rasional)
10. Mengidentifikasi teknik integrasi yang dapat digunakan dalam penyelesaian masalah hitung integral.
11. Menggunakan salah satu teknik integrasi dalam penyelesaian masalah hitung integral
12. Menggunakan gabungan teknik integrasi dalam penyelesaian masalah hitung integral
13. Menelaah konsep integral tak tentu dalam penyelesaian masalah sehari-hari.
14. Menggunakan konsep integral tak tentu dalam penyelesaian masalah sehari-hari.
15. Menelaah definisi dan aturan integral tentu
16. Menelaah konsep teorema dasar kalkulus
17. Menelaah konsep integral tentu dalam perhitungan luas bidang datar
18. Menelaah konsep integral tentu dalam menghitung volume benda putar
19. Menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan menghitung luas bidang datar dan volume benda menggunakan konsep integral tentu.

BAB 1

PENGANTAR DASAR INTEGRAL

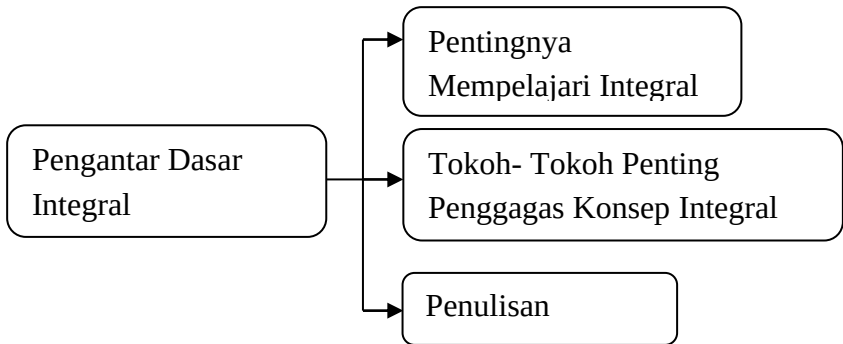
Pada Bab ini akan dibahas tentang pengantar dasar integral yang di susun dalam beberapa sub – bab materi. Materi yang disajikan pada Bab 1 terkait dengan pentingnya mempelajari integral, tokoh–tokoh penting pengangas konsep integral dan penulisan integral.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari dan mentelaah materi yang terdapat pada bab ini, mahasiswa di harapkan mampu:

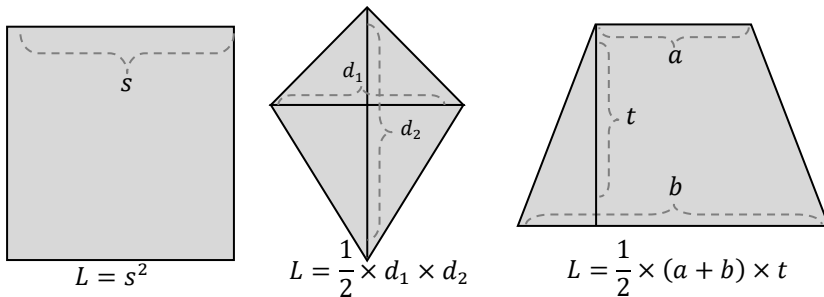
1. Menganalisis pentingnya mempelajari integral
2. Menelaah peran tokoh – tokoh penggagas konsep integral
3. Menguraikan konsep penulisan integral.

PETA KONSEP



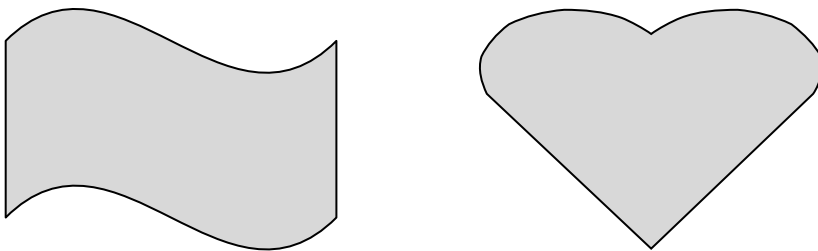
1.1 Pentingnya Mempelajari Integral

Masih ingatkah kamu tentang bagaimana cara menghitung luas suatu bidang datar beraturan seperti persegi, layang-layang atau trapesium? Tentu mudahkan? Semuanya sudah ditentukan dengan menggunakan rumus yang sudah kita ketahui bersama.



Gambar 1.1 Bentuk Bangun Datar Beraturan

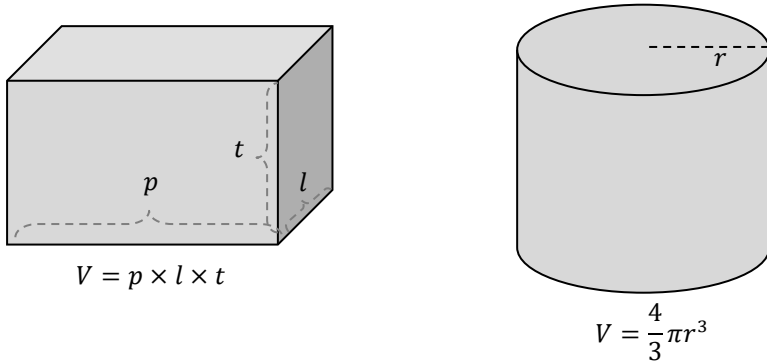
Lalu, bagaimana jika bidang datar yang dimaksud tidak beraturan bentuknya, bisakah kamu menentukan luasnya? Perhatikan gambar berikut:



Gambar 1.2 Bentuk Bangun Datar Tak Beraturan

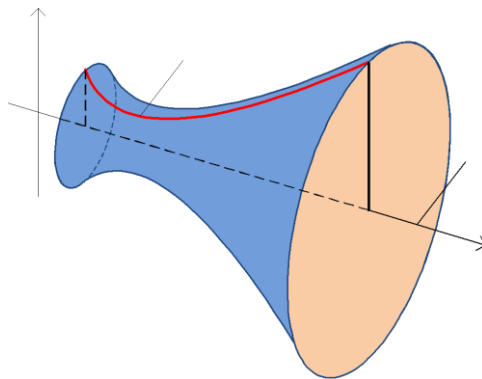
Pada gambar 1.2 di atas, apakah kalian mudah menemukan rumus baku dari luas bangun datar tersebut? Untuk mengetahui bagaimana cara menemukan rumus luas bangun pada gambar 1.2, pada paparan materi selanjutnya akan dijelaskan.

Sama halnya dengan menentukan luas suatu bidang datar beraturan, menentukan volume suatu bangun ruang beraturan (seperti balok, tabung, dan lain-lain) juga tidaklah sulit.



Gambar 1.3 Bentuk Bangun Ruang yang Beraturan

Tapi, bagaimana jika bangun ruang tersebut berbentuk tak beraturan? Dapatkah kamu menentukan volumenya? Perhatikan gambar berikut:



Gambar 1.4 Bentuk Bangun Ruang yang Tak Beraturan

Pada gambar 1.4 di atas, apakah dengan mudah kita dapat menentukan rumus baku volume dari bangun ruang tak beraturan tersebut?

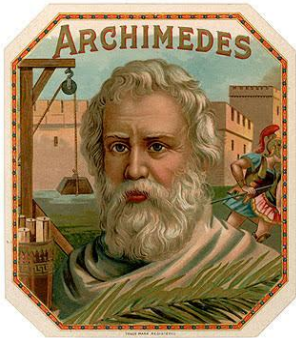
Akan cukup sulit untuk menentukan luas bidang datar yang tak beraturan dan volume bangun ruang yang tak beraturan. Namun, ada sebuah metode yang dapat digunakan untuk mengukur luas ataupun volume dari sebuah benda yang tak beraturan, yaitu dengan menggunakan konsep integral.

Bagaimana cara kita menggunakan konsep integral tersebut untuk menghitung luas atau volume sebuah benda? Pada integral, kita perlu mengetahui fungsi dari benda tersebut, yang dapat dinyatakan sebagai $y = f(x)$ atau $x = g(y)$. Selanjutnya, dengan menggunakan batas-batas tertentu, kita baru dapat menentukan luas atau volume dari benda yang kita inginkan. Konsep integral akan digunakan tersebut adalah konsep hitung integral tentu. Secara garis besar, konsep hitung integral itu terbagi dua, yaitu integral tak tentu dan integral tentu. Namun sebelum kita masuk ke bagian menentukan luas bidang datar dan volume benda putar dengan menggunakan konsep integral, maka terlebih dahulu kita harus mengetahui siapa saja tokoh – tokoh yang memperkenalkan konsep integral ini dan apa itu integral.

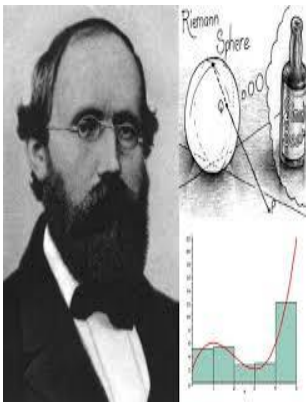
1.2 Tokoh- Tokoh Penting Penggagas Konsep Integral

Kalkulus adalah hasil perjuangan intelektual dramatis yang berlangsung selama 2500 tahun. Oleh sebab itu ada banyak tokoh yang tidak bisa penulis nyatakan satu persatu yang telah

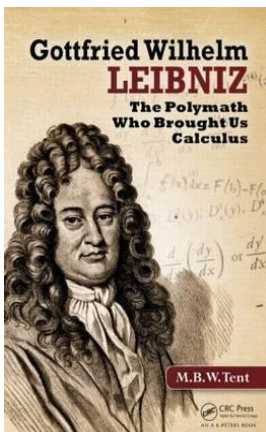
berkontribusi besar terhadap perkembangan ilmu kalkulus tersebut. Pada kesempatan ini penulis hanya memaparkan beberapa tokoh kalkulus khususnya yang telah menggagas kalkulus integral.



Archimedes seorang ilmuwan bangsa Yunani yang berasal dari Syracuse (287 – 212 SM). Archimedes menggunakan ide integral tersebut untuk mencari luas daerah suatu lingkaran, daerah yang dibatasi oleh parabola, tali busur dan sebagainya



Sejarah mencatat orang yang paling berjasa dalam hal pengembangan kalkulus integral adalah Georg Friederich Benhard Riemann (1826–1866) M . Beliau adalah orang yang pertama kali memperkenalkan konsep menghitung luas bangun datar dengan cara partisi. Sehingga dalam pembahasan integral ada kita kenal dengan istilah integral Reimann.



Gottfried Wilhelm Leibniz. Leibniz adalah seorang ilmuwan dari Leipzig Jerman. Ia lahir pada (1 Juli 1646 – 14 November 1716). Beliau adalah seorang filsuf Jerman keturunan Sorbia dan berasal dari Sachsen. Leibniz terkenal karena faham Theodicee yang menganggap bahwa manusia hidup dalam dunia yang sebaik mungkin karena dunia diciptakan oleh Tuhan Yang Sempurna. Faham Theodicee ini menjadi terkenal karena dikritik dalam buku Candide karangan Voltaire.

Selain sebagai seorang filsuf, ia juga terkenal sebagai seorang ilmuwan, matematikawan, diplomat, fisikawan, sejarawan dan doktor dalam hukum duniawi dan hukum gereja. Ia dianggap sebagai Jiwa Universitas zamannya dan merupakan salah seorang Filsuf yang paling berpengaruh pada abad ke -17 dan ke -18.

Leibniz lahir di kota Leipzig, Sachsen pada tahun 1646. Orang tuanya, terutama ayahnya Friedrich Leibniz sudah sejak awal membangkitkan rasa ketertarikannya terhadap masalah-masalah yuridis dan falsafi. Ayahnya merupakan seorang ahli hukum dan profesor dalam bidang etika dan ibunya adalah putri seorang ahli hukum pula.

Gottfried Leibniz telah belajar bahasa Yunani dan bahasa Latin pada usia 8 tahun berkat kumpulan buku-buku ayahnya yang luas. Pada usia 12 tahun ia telah mengembangkan beberapa hipotesis logika yang menjadi bahasa simbol matematika.

Pada tahun 1661 Leibniz mendaftarkan diri di Universitas Leipzig dan kuliah filsafat pada ahli teologi Johann Adam Schertzer dan teoretikus filsafat Jakob Thomasius. Pada tahun 1663 ia pindah universitas, sekarang di Universitas Jena untuk belajar lebih lanjut di bawah ahli matematika, fisika dan astronomi Erhard Wiegel untuk membedah pemikiran Pythagoras. Pada usia 20 tahun ia ingin promosi dalam bidang doktor hukum, namun para profesor Leipzig menganggapnya terlalu muda. Oleh karena itu, Leibniz pergi ke Nürnberg untuk belajar lebih lanjut di Universitas Altdorf.

Kebanyakan ahli sejarah percaya bahwa Newton dan Leibniz mengembangkan kalkulus secara terpisah. Keduanya pula menggunakan notasi matematika yang berbeda pula. Menurut teman-teman dekat Newton, Newton telah menyelesaikan karyanya bertahun-tahun sebelum Leibniz, namun tidak mempublikasikannya sampai dengan tahun 1693. Ia pun baru menjelaskannya secara penuh pada tahun 1704

Pada tahun 1684, Leibniz sudah mulai mempublikasikan penjelasan penuh atas karyanya. Notasi dan "metode diferensial" Leibniz secara universal diadopsi di Daratan Eropa, sedangkan Kerajaan Britania baru mengadopsinya setelah tahun 1820. Dalam buku catatan Leibniz, dapat ditemukan adanya gagasan-gagasan sistematis yang memperlihatkan bagaimana Leibniz mengembangkan kalkulusnya dari awal sampai akhir, padahal pada catatan Newton hanya dapat ditemukan hasil akhirnya saja.

Pada tahun 1699, anggota-anggota Royal Society mulai menuduh Leibniz menjiplak karya Newton. Perselisihan ini memuncak pada tahun 1711. Royal Society kemudian dalam suatu kajian memutuskan bahwa Newtonlah penemu sebenarnya dan mencap Leibniz sebagai penjiplak. Kajian ini kemudian diragukan karena setelahnya ditemukan bahwa Newton sendiri yang menulis kata akhir kesimpulan laporan kajian ini. Sejak itulah dimulainya perselisihan sengit antara Newton dengan Leibniz. Perselisihan ini berakhir sepeninggal Leibniz pada tahun 1716.

1.3 Penulisan Integral

Pada pembahasan turunan, kita telah mengenal berbagai bentuk penulisan dari notasi turunan, hal ini juga berlaku pada integral. Integral atau anti turunan ditulis dengan lambang Leibniz. Leibniz memperkenalkan beberapa notasi dalam kalkulus yang tetap digunakan sampai sekarang. Sebagai contoh simbol integral $\int$ yang merupakan modifikasi dari huruf S, diambil dari kata Latin *summa* dan penggunaan huruf d untuk diferensial (turunan) dari kata Latin *differentia*.

Integral ditulis dengan $\intdx$ yang dapat dibaca (integral dariterhadap x). Untuk memahami konsep integral, sangat diperlukan kemampuan dalam turunan fungsi. Selain itu, jika kamu memahami trik-trik khusus pada integral, tentu akan sangat membantu mempermudah dalam penyelesaian masalah terkait penggunaan konsep integral. Oleh karena itu, perhatikan baik-baik penjelasan pada bagian selanjutnya.

BAB 2

INTEGRAL TAK TENTU

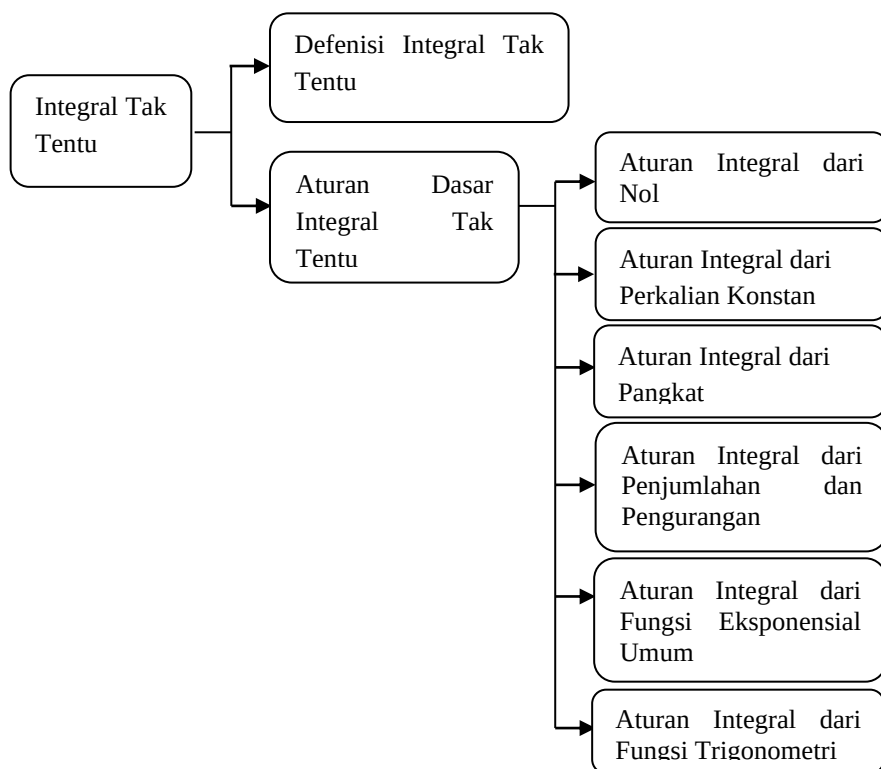
Pada Bab ini akan dibahas tentang integral tak tentu yang di susun dalam beberapa sub – bab materi. Materi yang disajikan pada Bab 2 terkait dengan definisi integral tak tentu dan aturan dasar integral tak tentu. Selain itu, untuk menambah pemahaman mahasiswa, dalam Bab ini juga disajikan beberapa contoh soal beserta penyelesaiannya, kemudian dilengkapi juga dengan rangkuman serta latihan.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari dan mentelaah materi yang terdapat pada bab ini, mahasiswa di harapkan mampu:

1. Menganalisis definisi integral tak tentu
2. Menganalisis aturan dasar integral tak tentu
3. Menggunakan aturan dasar integral tak tentu untuk menyelesaikan permasalahan.

PETA KONSEP



2.1. Defenisi Integral Tak Tentu

Integral disebut juga sebagai antiderivatif atau sebagai suatu anti turunan. Artinya adalah aktivitas yang melibatkan integral, akan berdampak kepada pengembalian kepada bentuk asalnya.

Perhatikan ilustrasi berikut ini:

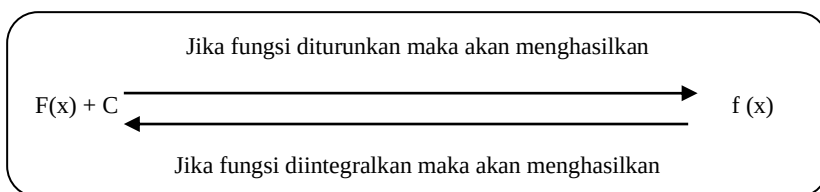
1. Misalkan F adalah sebuah fungsi yang didefenisikan oleh:
$$F(x) = 6x^2 + 3x - 5$$
2. Jika fungsi yang telah didefenisikan sebagai $F(x) = 6x^2 + 3x - 5$ dikenakan aturan turunan, maka akan menghasilkan: $F'(x) = 12x + 3$
3. Jika kita menyatakan bahwa $F'(x) = f(x)$, maka dapat dinyatakan juga bahwa $f(x)$ adalah turunan dari $F(x)$. Sebaliknya $F(x)$ dapat dinyatakan sebagai anti turunan dari $f(x)$
4. Selanjutnya, jika kita misalkan sebuah fungsi yang didefenisikan oleh $G(x) = 6x^2 + 3x + 100$, dan kemudian kita kenakan aturan turunan pada fungsi tersebut, maka akan menghasilkan: $G'(x) = 12x + 3$. Hal ini mengindikasikan bahwa $F'(x) = G'(x) = f(x)$. Bentuk $f(x)$ adalah turunan dari $F(x)$ dan $G(x)$, sedangkan $F(x)$ dan $G(x)$ merupakan anti turunan dari $f(x)$.
5. Selanjutnya jika sebuah fungsi yang didefenisikan oleh:
$$H(x) = 6x^2 + 3x + C,$$
 dengan C sembarang konstanta, apabila dikenakan aturan turunan pada fungsi tersebut,

maka akan menghasilkan $H'(x) = 12x + 3$. Hal ini mengindikasikan bahwa $H'(x) = F'(x) = G'(x) = f(x)$. Bentuk $f(x)$ adalah turunan dari $F(x)$, $G(x)$ dan $H(x)$, sedangkan $F(x)$, $G(x)$ dan $H(x)$ merupakan anti turunan dari $f(x)$.

Berdasarkan ilustrasi yang diberikan di atas, maka ada beberapa hal yang dapat disimpulkan:

1. Dari beberapa fungsi yang berbeda ($F(x)$, $G(x)$ dan $H(x)$) memiliki turunan yang sama ($F'(x) = G'(x) = H'(x) = f(x)$).
2. $f(x)$ disebut sebagai turunan dari $F(x)$, $G(x)$ dan $H(x)$, sedangkan $F(x)$, $G(x)$ dan $H(x)$ disebut sebagai anti turunan dari $f(x)$.
3. Anti turunan dari $f(x)$ tidaklah tunggal
4. Secara umum, dapat dinyatakan bahwa jika F merupakan anti turunan dari f , maka setiap anti turunan dari f diberikan oleh $F(x) + C$, dengan C merupakan sebarang konstanta bilangan riil.

Apabila kita ilustrasikan pernyataan di atas, maka dapat dinyatakan seperti bagan di bawah ini:



Gambar 2.1. Konsep Integral Tak Tentu Sebagai Anti Turunan

Keterangan Gambar 2.1:

$F(x) + C$ diturunkan terhadap x akan menghasilkan $f(x)$.

Selanjutnya $f(x)$ diintegrasikan terhadap x dan akan menghasilkan $F(x) + C$ kembali.

Berdasarkan keterangan di atas, dapat dinyatakan **bahwa fungsi F dikatakan sebagai anti turunan dari f pada interval I , jika $dF = f$ pada I , yakni jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua x dalam I . Dengan kata lain, jika diberikan suatu fungsi $f(x)$ dan kita diminta untuk mencari suatu fungsi $F(x)$ sedemikian sehingga $dF(x) = F'(x) = f(x)$.**

Secara umum, operasi anti turunan menggunakan lambing Leibniz, yakni $\int \dots dx$ atau dibaca sebagai integral dariterhadap x . Proses menghitung anti turunan atau integral dari ungsi $f(x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Keterangan:

$\int$ = lambang Leibniz untuk anti turunan (integral)

$f(x)$ = fungsi integran

$F(x) + C$ = fungsi primitif

C = konstanta integrasi

$\int F(x)dx = F(x) + C$, dinamakan “integral tak tentu”, karena jawaban atau hasilnya masih memuat C (bilangan konstanta). $\int f(x)dx$ (dibaca integral dari $f(x)$ terhadap x).

2.2. Aturan Dasar Integral Tak Tentu

Untuk dapat menentukan hasil integral tak tentu, maka dapat menggunakan aturan yang telah baku berikut ini:

1. Aturan Integral dari Nol

Suatu fungsi nol memiliki anti turunan berupa semua fungsi konstan. Dengan kata lain, dapat dinyatakan sebagai:

$$\int 0 \, dx = C$$

2. Aturan Integral dari Perkalian Konstan

Jika suatu fungsi $f(x)$ mempunyai anti turunan (integral), maka untuk sembarang bilangan riil C , dipunyai:

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$$

3. Aturan Integral dari Pangkat

Jika n adalah suatu bilangan riil sedemikian sehingga $n \neq -1$, maka:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

Jika $n = -1$, maka akan dipunyai $\int x^{-1}dx = \ln|x| + C$

4. Aturan Integral dari Penjumlahan dan Pengurangan

Jika $f(x)$ dan $g(x)$ mempunyai anti turunan (integral), maka:

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

5. Aturan Integral dari Fungsi Eksponensial umum

Jika diandaikan $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Selanjutnya secara khusus dengan pengandaian $a = e$, maka akan dipunyai:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

6. Aturan Integral dari Fungsi Trigonometri

Berikut ini adalah aturan integral dari fungsi trigonometri:

- a. $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$
- b. $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$
- c. $\int \csc^2(x) dx = -\cot(x) + C$
- d. $\int \sec^2(x) dx = \tan(x) + C$
- e. $\int \cot(x) \csc(x) dx = -\csc(x) + C$
- f. $\int \tan(x) \sec(x) dx = \sec(x) + C$
- g. $\int \csc(x) dx = -\ln|\cot(x) + \csc(x)| + C$
- h. $\int \sec(x) dx = \ln|\tan(x) + \sec(x)| + C$

Berikut akan disajikan beberapa contoh penyelesaian integral tak tentu dengan menggunakan aturan-aturan integral tak tentu yang telah dinyatakan di atas.

Contoh Soal

1. Dinyatakan bahwa selesaian dari $\int \sqrt{ax} \, dx$ adalah $\frac{2}{3}\sqrt{(ax)^3} + C$

Tentukan:

- Aturan integral apa yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan hitung integral di atas? Kemukakan alasan mu!
- Gunakan aturan integral yang kamu nyatakan pada poin a di atas untuk menyelesaikan permasalahan hitung integral di atas!
- Apakah selesaian yang kamu temukan sama dengan selesaian yang dinyatakan di atas?
 - Jika ya, nyatakan selesaiannya!
 - Jika tidak, nyatakan perbedaannya dengan disertai alasan!

Penyelesaian:

- Aturan integral yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan hitung integral di atas adalah aturan integral dari perkalian konstanta dan aturan integral dari pangkat. Hal ini dikarenakan, integran $\sqrt{ax}$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\sqrt{a}(x)^{\frac{1}{2}}$, dimana terdapat bentuk pangkat yaitu $(x)^{\frac{1}{2}}$ dan perkalian konstanta dimana dalam bentuk $\sqrt{a}(x)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{a}$

dinyatakan sebagai konstanta sedangkan $(x)^{\frac{1}{2}}$ adalah integran yang akan diintegrasikan.

- b. Dengan menggunakan aturan integral dari perkalian konstanta dan aturan integral dari pangkat, maka dapat dinyatakan selesaiannya sebagai berikut.

$$\int \sqrt{ax} \, dx = \sqrt{a} \int (x)^{\frac{1}{2}} \, dx$$

$$\int \sqrt{ax} \, dx = \sqrt{a} \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$\int \sqrt{ax} \, dx = \sqrt{a} \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int \sqrt{ax} \, dx = \frac{2}{3} \sqrt{a} x^{3/2} + C$$

- c. Selesaian yang dihasilkan berbeda dengan yang dinyatakan. Hal ini dikarenakan selesaian yang dinyatakan pada permasalahan hitung integral di atas adalah salah. Pada selesaian di atas, hanya menggunakan aturan integral dari pangkat, sehingga $\sqrt{ax}$ dinyatakan sebagai integran yang harus diintegrasikan. Padahal, integran diintegrasikan terhadap x . Sehingga penyelesaian yang dihasilkan belum benar.

2. Tentukan apakah $\int \frac{4x^2-2\sqrt{x}}{x} \, dx$ dapat diselesaikan dengan menggunakan aturan integral dari penjumlahan dan pengurangan serta aturan integral dari pangkat! kemukakan alasanmu dan kemudian tentukan selesainya!

Penyelesaian:

$\int \frac{4x^2-2\sqrt{x}}{x} dx$ dapat diselesaikan dengan menggunakan aturan integral dari penjumlahan dan pengurangan, aturan integral dari pangkat dan aturan integral dari perkalian konstanta. Hal ini dikarenakan fungsi integran $\frac{4x^2-2\sqrt{x}}{x}$ dapat dinyatakan dalam bentuk penjumlahan dan pengurangan serta dapat dinyatakan dalam bentuk pangkat. Selanjutnya terdapat konstanta pada fungsi integran tersebut yaitu $4x^2$, sehingga penyelesaiannya harus menggunakan aturan integral dari perkalian konstanta.

Selesaian dari $\int \frac{4x^2-2\sqrt{x}}{x} dx$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\int \frac{4x^2-2\sqrt{x}}{x} dx = \int (4x^2 - 2x^{1/2}) x^{-1} dx$$

$$\int \frac{4x^2-2\sqrt{x}}{x} dx = \int (4x^{2-1} - 2x^{\frac{1}{2}-1}) dx$$

$$\int \frac{4x^2-2\sqrt{x}}{x} dx = \int (4x - 2x^{-\frac{1}{2}}) dx$$

$$\int \frac{4x^2-2\sqrt{x}}{x} dx = \int 4x dx - \int 2x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$\int \frac{4x^2-2\sqrt{x}}{x} dx = 4 \int x dx - 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$\int \frac{4x^2-2\sqrt{x}}{x} dx = \frac{4}{2} x^2 - 2 \left(\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} \right) + C$$

$$\int \frac{4x^2-2\sqrt{x}}{x} dx = 2x^2 - 4\sqrt{x} + C$$

3. Dinyatakan bahwa $\int \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} dx = \ln |\sec x| - x + C$.

Tentukan apakah pernyataan tersebut bernilai benar?

- Jika ya, tentukan proses penyelesaian untuk menunjukkan pernyataan tersebut benar!
- Jika tidak, nyatakan alasan mengapa belum benar dan nyatakan pernyataan yang benarnya menurut mu!

Penyelesaian:

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx - \int \frac{\cos x}{\cos x} dx \dots \dots \dots \text{Ingat : } \frac{\sin x}{\cos x} =$$

$\tan x$

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} dx = \int \tan x dx - \int dx$$

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} dx = \ln |\sec x| - x + C$$

Jadi pernyataan di atas bernilai benar.

4. Perhatikanlah selesaian permasalahan di bawah ini:

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \int \frac{dx}{1} + \int \frac{dx}{\cos x}$$

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = x + \int \sec x dx \dots \dots \dots \text{ingat: } \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = x + \ln |\tan(x) + \sec(x)| + C$$

Tentukan:

- a. Aturan integral apakah yang digunakan dalam penyelesaian hitung integral di atas? Kemukakan alasan mu!
- b. Apakah aturan integral yang digunakan sudah benar?
 - Jika ya, nyatakan alasan mu!
 - Jika tidak, nyatakan alasan mu dan tulislah jawaban yang benarnya!.

- c. Apakah ada cara lain atau aturan integral lain yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan hitung integral di atas? Jika ada nyatakan selesalain permasalahan hitung integral di atas dengan cara tersebut dan nyatakan cara mana yang lebih efektif dengan menyertakan alasan mu!

Penyelesaian:

- a. Aturan integral yang dapat digunakan dalam penyelesaian hitung integral di atas adalah dengan menggunakan aturan integral dari fungsi trigonometri. Hal ini dikarenakan fungsi integrannya merupakan fungsi trigonometri.
- b. Aturan integral yang digunakan dalam penyelesaian hitung integral di atas sudah benar yaitu aturan integral dari fungsi trigonometri, tetapi dalam penggunaannya mengalami kesalahan konsep. Kesalahan konsepnya yaitu:

- $\int \frac{dx}{1+\cos x} \neq \int \frac{dx}{1} + \int \frac{dx}{\cos x}$
- Hal ini mengakibatkan selesaian yang dinyatakan di atas belum benar.

- c. Cara lain yang dapat digunakan adalah dengan menggunakan manipulasi persamaan trigonometri.

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{1-\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)} dx$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} dx$$

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \int \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} dx \dots \dots \text{ingat: } 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \right) dx$$

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \int (\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x \cot x) dx$$

$$\text{Ingat: } \frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x \text{ dan } \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \left(\frac{1}{\sin x} \right) \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)$$

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \int \operatorname{cosec}^2 x dx - \int \operatorname{cosec} x \cot x dx$$

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = -\cot x + \operatorname{cosec} x + c$$

RANGKUMAN

1. fungsi F dikatakan sebagai anti turunan dari f pada interval I , jika $dF = f$ pada I , yakni jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua x dalam I . Dengan kata lain, jika diberikan suatu fungsi $f(x)$ dan kita diminta untuk mencari suatu fungsi $F(x)$ sedemikian sehingga $dF(x) = F'(x) = f(x)$.
2. Secara umum, operasi anti turunan menggunakan lambing Leibniz, yakni $\int \dots dx$ atau dibaca sebagai integral dariterhadap x . Proses menghitung anti turunan atau integral dari ungsi $f(x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Keterangan:

$\int$ = lambang Leibniz untuk anti turunan (integral)

$f(x)$ = fungsi integran

$F(x) + C$ = fungsi primitif

C = konstanta integrasi

3. Aturan Integral dari Nol

Suatu fungsi nol memiliki anti turunan berupa semua fungsi konstan. Dengan kata lain, dapat dinyatakan sebagai:

$$\int 0 dx = C$$

4. Aturan Integral dari Perkalian Konstan

Jika suatu fungsi $f(x)$ mempunyai anti turunan (integral), maka untuk sembarang bilangan riil C , dipunyai:

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$$

5. Aturan Integral dari Pangkat

Jika n adalah suatu bilangan riil sedemikian sehingga $n \neq -1$, maka:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

Jika $n = -1$, maka akan dipunyai $\int x^{-1} dx = \ln|x| + C$

6. Aturan Integral dari Penjumlahan dan Pengurangan

Jika $f(x)$ dan $g(x)$ mempunyai anti turunan (integral), maka:

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

7. Aturan Integral dari Fungsi Eksponensial umum

Jika diandaikan $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Selanjutnya secara khusus dengan pengandaian $a = e$, maka akan dipunyai:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

8. Aturan Integral dari Fungsi Trigonometri

Berikut ini adalah aturan integral dari fungsi trigonometri:

- i. $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$
- j. $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$
- k. $\int \csc^2(x) dx = -\cot(x) + C$
- l. $\int \sec^2(x) dx = \tan(x) + C$
- m. $\int \cot(x) \csc(x) dx = -\csc(x) + C$
- n. $\int \tan(x) \sec(x) dx = \sec(x) + C$
- o. $\int \csc(x) dx = -\ln|\cot(x) + \csc(x)| + C$
- p. $\int \sec(x) dx = \ln|\tan(x) + \sec(x)| + C$

LATIHAN

1. Dinyatakan bahwa selesaian dari $\int \sqrt{ax} \, dx$ adalah $\frac{2}{3}\sqrt{(ax)^3} + C$

Tentukan:

- Aturan integral apa yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan hitung integral di atas? Kemukakan alasan mu!
 - Gunakan aturan integral yang kamu nyatakan pada poin a di atas untuk menyelesaikan permasalahan hitung integral di atas!
 - Apakah selesaian yang kamu temukan sama dengan selesaian yang dinyatakan di atas?
 - Jika ya, nyatakan selesaiannya!
 - Jika tidak, nyatakan perbedaannya dengan disertai alasan!
2. Tentukan apakah $\int \frac{4x^2 - 2\sqrt{x}}{x} \, dx$ dapat diselesaikan dengan menggunakan aturan integral dari penjumlahan dan pengurangan serta aturan integral dari pangkat! kemukakan alasanmu dan kemudian tentukan selesainya!
3. Dinyatakan bahwa $\int \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} \, dx = \ln |\sec x| - x + C$.
Tentukan apakah pernyataan tersebut bernilai benar?
- Jika ya, tentukan proses penyelesaian untuk menunjukkan pernyataan tersebut benar!
 - Jika tidak, nyatakan alasan mengapa belum benar dan nyatakan pernyataan yang benarnya menurut mu!

4. Perhatikanlah selesaian permasalahan di bawah ini:

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{1} + \int \frac{dx}{\cos x}$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = x + \int \sec x \, dx \dots\dots\dots \text{ingat: } \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = x + \ln|\tan(x) + \sec(x)| + C$$

Tentukan:

- a. Aturan integral apakah yang digunakan dalam penyelesaian hitung integral di atas? Kemukakan alasan mu!
- b. Apakah aturan integral yang digunakan sudah benar?
 - Jika ya, nyatakan alasan mu!
 - Jika tidak, nyatakan alasan mu dan tulislah jawaban yang benarnya!.
- c. Apakah ada cara lain atau aturan integral lain yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan hitung integral di atas? Jika ada nyatakan selesalain permasalahan hitung integral di atas dengan cara tersebut dan nyatakan cara mana yang lebih efektif dengan menyertakan alasan mu!

5. Tentukan selesaian dari integral tak tentu berikut ini:

a. $\int \sqrt{ax} \, dx$

b. $\int \sqrt{x} (3x - 2) dx$

c. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

d. $\int \frac{4x^2 - 2\sqrt{x}}{x} \, dx$

e. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} dx$

f. $\int (1 + \tan x)^2 dx$

g. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

h. $\int (e^x + 3 \cos x) dx$

BAB 3

TEKNIK INTEGRASI

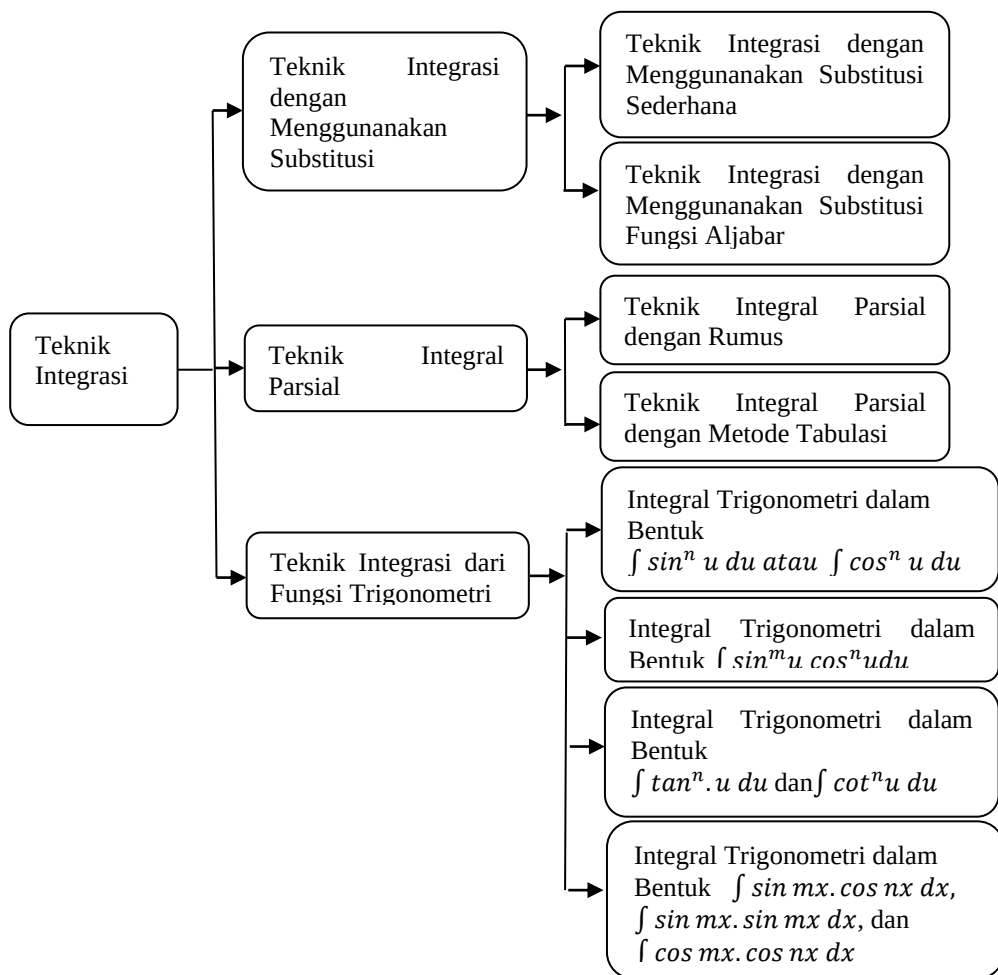
Pada Bab ini akan dibahas tentang teknik integrasi yang disusun dalam beberapa sub – bab materi. Materi yang disajikan pada Bab 3 terkait dengan teknik integrasi dengan menggunakan substitusi, teknik integral parsial, teknik integrasi dari fungsi trigonometri, teknik integrasi dengan substitusi trigonometri, teknik integrasi fungsi rasional, teknik integrasi fungsi Eksponensial asli dan logaritma natural . Selain itu, untuk menambah pemahaman mahasiswa, dalam Bab ini juga disajikan beberapa contoh soal beserta penyelesaiannya, kemudian dilengkapi juga dengan rangkuman serta latihan.

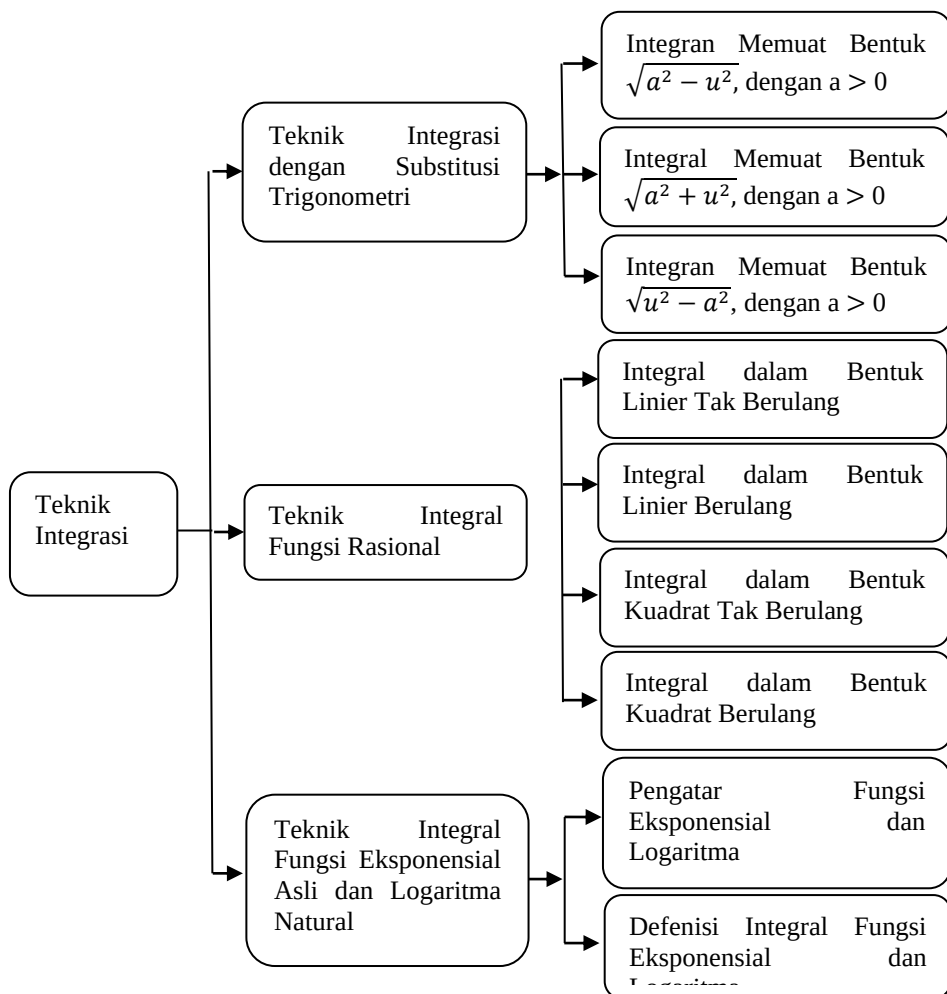
Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari dan menelaah materi yang terdapat pada bab ini, mahasiswa diharapkan mampu:

1. Mengidentifikasi perbedaan dan kesamaan dari tiap teknik integrasi.
2. Menggunakan teknik integrasi untuk menyelesaikan permasalahan hitung integral.

PETA KONSEP





3.1. Teknik Integrasi dengan Menggunakan Substitusi

3.1.1 Teknik Integrasi dengan Substitusi Sederhana

Dalam diferensiasi kita telah mengenal adanya aturan rantai yang digunakan untuk membantu menyelesaikan masalah diferensiasi. Sekarang, bagaimana aturan rantai yang digunakan dalam diferensiasi dapat kita gunakan untuk membantu menyelesaikan masalah dalam integrasi. Teknik ini biasanya disebut integrasi dengan substitusi. Teknik integrasi dengan substitusi tidak selalu dapat digunakan.

Andaikan g suatu fungsi yang dapat dideferensialkan, dan n adalah sebuah bilangan rasional, $n \neq -1$, maka

$$\int [g(x)]^n [g'(x) dx] = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \text{ rumus 1}$$

Andaikan $u = g(x)$, dan $du = g'(x) dx$, maka rumus 1 di atas dapat ditulis menjadi,

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

Contoh Soal

Perhatikan permasalahan di bawah ini!

Faqih diharuskan menyelesaikan persoalan terkait integral tak tentu di bawah ini:

- a. $\int 3x^2 dx = \text{-----}$
- b. $\int x(x^2 - 9)^{\frac{3}{2}} dx = \text{-----}$
- c. $\int e^x(1 + e^x)^5 dx = \text{-----}$

Faqih menyatakan bahwa persoalan di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan rumus dasar integral. Tentukan apakah

pernyataan Faqih tersebut bernilai benar atau salah!. Jika pernyataannya bernilai benar, maka nyatakan alasannya dan nyatakan selesaiannya, sedangkan jika pernyataan Faqih tersebut salah, nyatakan alasan dan selesaiannya.

Coba kalian amati permasalahan di atas, apakah pernyataan yang dinyatakan Faqih di atas bernilai benar atau salah? Berikan alasan. Selanjutnya identifikasilah apakah ada cara lain yang dapat digunakan untuk menyelesaikan hitung integral di atas?.

Sebelum memulai untuk membantu Faqih menyelesaikan permasalahan di atas, maka terlebih dahulu kalian harus mengetahui, memahami serta mampu menggunakan rumus dasar integral dalam penyelesaian hitung integral. Ayo kembali kita amati permasalahan hitung integral yang harus diselesaikan oleh Faqih. Faqih diharuskan menyelesaikan 3 buah persoalan hitung integral, dimana ketiga persoalan tersebut berbeda satu dengan yang lainnya. Untuk dapat menyelesaikannya, mari kita lakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Perhatikan dan lakukan telaah terhadap ketiga persoalan yang diberikan. Telaah dapat dilakukan dengan cara menentukan apakah ketiga permasalahan tersebut dapat langsung diselesaikan dengan menggunakan rumus dasar integral.

a. $\int 3x^2 dx = \dots$, persoalan nomor 1 dapat diselesaikan dengan menggunakan rumus dasar integral yaitu: $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} dx + c$. Sehingga selesaian dari persoalan nomor 1

tersebut adalah: $\int 3x^2 dx = \frac{3}{2+1} x^{2+1} dx + c = \frac{3}{3} x^3 dx + c$
atau $x^3 dx + c$

- b. Selanjutnya lakukan langkah yang sama seperti persoalan nomor 1 untuk persoalan nomor dua dan tiga.
2. Jika kalian tidak dapat menentukan rumus dasar integral mana yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan nomor dua dan tiga, maka lakukan langkah sebagai berikut:
- a. Tulislah kembali persoalan nomor dua, yaitu $\int x (x^2 - 9)^{\frac{3}{2}} dx$
- b. Tentukan suatu fungsi yang dapat didiferensialkan. Dari persoalan nomor 2, terdapat dua fungsi yang dapat didiferensialkan yaitu: x dan $(x^2 - 9)$.
- c. Tentukan diferensial dari fungsi yang sudah dinyatakan pada poin b di atas.

Respon

Untuk fungsi x : misalkan $u = x$, $du = dx$ (pers. 1)

Untuk fungsi $(x^2 - 9)$: misalkan $u = x^2 - 9$, $du = 2x dx$ atau
 $\frac{1}{2} du = x dx$ (pers. 2)

- d. Tentukan mana dari hasil dari diferensial fungsi di atas yang apabila disubstitusikan ke persoalan akan membuat persoalan menjadi semakin mudah untuk diselesaikan.

Respon

Misal kita ambil diferensial untuk fungsi x di atas (pers. 1) , maka apabila disubstitusikan ke persoalan, akan menjadi:

$\int u (u^2 - 9)^{\frac{3}{2}} du$. Apakah persoalan tersebut menjadi semakin mudah untuk diselesaikan? Atau sama saja dengan bentuk asalnya?

Selanjutnya coba kita ambil diferensial dari fungsi $x^2 - 9$ (pers. 2), maka apabila disubstitusikan ke persoalan, akan menjadi: $\int (u)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} du$. Apakah persoalan tersebut menjadi semakin mudah untuk diselesaikan?

- e. Tentukan persoalan mana yang dapat diselesaikan dengan mudah setelah dilakukan proses substitusi.

Respon

Dari sajian penjelasan pada poin d, maka kita dapat melihat bahwa diferensial dari fungsi $x^2 - 9$ dapat membuat persoalan nomor 2 menjadi lebih mudah untuk diselesaikan, karena setelah disubstitusikan, maka langsung dapat kita gunakan rumus dasar integral untuk menentukan penyelesaian dari persoalan nomor 2 tersebut.

$\int x (x^2 - 9)^{\frac{3}{2}} dx$, misalkan $u = x^2 - 9$, $du = 2x dx$ atau $\frac{1}{2} du = dx$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \int x (x^2 - 9)^{\frac{3}{2}} dx \\ = \int (u)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int (u)^{\frac{3}{2}} du = \frac{1}{5} u^{\frac{5}{2}} + C \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{5}(x^2 - 9)^{\frac{5}{2}} + C$$

RANGKUMAN

1. Andaikan g suatu fungsi yang dapat dideferensialkan, dan n adalah sebuah bilangan rasional, $n \neq -1$, maka

$$\int [g(x)]^n [g'(x)dx] = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C,$$

Andaikan $u = g(x)$, dan $du = g'(x) dx$, maka rumus 1 di atas dapat ditulis menjadi,

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

2. Untuk dapat menggunakan teknik integrasi substitusi, maka ada beberapa hal yang harus diperhatikan:
- a. Jika persoalan integral yang diberikan tidak dapat secara langsung diselesaikan dengan menggunakan rumus dasar integral, maka salah satu cara yang dapat dilakukan adalah dengan menggunakan teknik integrasi substitusi.
 - b. Dalam menggunakan teknik integrasi substitusi, kita terlebih dahulu harus mengetahui antiderivatif dari fungsi yang kita tentukan.
 - c. Selanjutnya kita harus menemukan suatu substitusi yang sesuai dari antiderivatif fungsi yang sudah ditemukan, sehingga membuat persoalan menjadi semakin mudah untuk diselesaikan.
 - d. Jika menemukan lebih dari satu substitusi antiderivatif dari fungsi yang sesuai, maka tentukan substitusi mana yang dapat membuat persoalan menjadi semakin mudah untuk diselesaikan

LATIHAN

1. Dinyatakan bahwa $\int \frac{x}{\sqrt{4x^2-9}} dx$ tidak dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik integrasi metode substitusi. Tentukan apakah pernyataan tersebut bernilai benar atau salah?. Jika benar, berikan alasan dan nyatakan selesainya. Sedangkan jika menurut mu salah, maka nyatakan alasan dan selesainya!
2. Dinyatakan bahwa selesaian dari $\int e^{3x+5} dx = \frac{1}{3}e^{3x+5} + c$. Nyatakan proses untuk mendapatkan selesaiannya!
3. Dinyatakan bahwa fungsi pengganti dari $\int \sin 2x \cos^2 2x dx$ adalah $u = \cos 2x$. Tentukan selesaiannya dengan menggunakan fungsi pengganti tersebut!
4. Dinyatakan selesaian dari $\int \frac{\cos x}{9 - \sin^2} dx = \frac{1}{2} \sin(5 - 2x) + C$. Tentukan apakah pernyataan tersebut bernilai benar atau salah. Jika benar, maka nyatakan proses untuk mendapatkan selesainya, sedangkan jika menurut mu masih salah, tentukan selesain yang menurut mu benar!
5. Perhatikan penyelesaian hitung integral berikut ini!

$$\int \sin 2x \cos^2 2x dx$$

Misalkan: $u = \cos 2x$; $du = \dots\dots\dots dx$; $dx = \frac{1}{\dots\dots\dots} du$

Silakan lengkapi sampai menemukan selesaian dari hitung integral tersebut!

6. Tentukan selesaian dari $\int \left(\frac{\sec(x)}{1 + \tan(x)} \right)^2 dx$

Apakah cara yang digunakan dalam menentukan selesaiannya dapat dilakukan dengan menggunakan rumus dasar integral atau menggunakan teknik integrasi substitusi? Berikan alasan!.
Apakah teknik integrasi substitusi dapat selalu digunakan? Berikan alasan!

3.1.2. Teknik Integrasi dengan Substitusi Fungsi Aljabar

3.1.2.1 Integral Memuat Persamaan Kuadrat

Dalam penyelesaian hitung integral yang memuat integran berbentuk persamaan kuadrat, usaha yang dapat dilakukan untuk menyelesaikannya yaitu usahakan integran yang berbentuk persamaan kuadrat disederhanakan menjadi bentuk – bentuk yang sesuai dengan rumus – rumus dasar integral.

Untuk dapat memahami dapat memahami cara penyelesaiannya, perhatikan contoh di bawah ini:

Contoh Soal

1. Tentukan selesaian dari hitung integral $\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4}} dx$

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan hitung integral di atas, dapat kita lakukan dengan langkah sebagai berikut:

- Nyatakan terlebih dahulu bentuk sederhana dari $\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4}}$

Respon

$$\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{4}{\sqrt{x^2+4}}$$

- Substitusikan bentuk sederhana yang telah kita peroleh ke dalam

$$\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4}} dx$$

Respon

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4}} dx &= \int \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{4}{\sqrt{x^2+4}} \right) dx \\ &= \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} dx + \int \frac{4}{\sqrt{x^2+4}} dx \end{aligned}$$

- Tentukan suku – suku yang dihasilkan pada ruas kanan

Respon

Suku pertama: $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} dx$

Suku kedua : $\int \frac{5}{\sqrt{x^2+4}} dx$

- Tentukan cara atau teknik yang tepat yang dapat digunakan untuk menyelesaikan hitung integral dari masing- masing suku tersebut.

Respon

- Suku pertama: $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} dx$

Untuk suku pertama, dapat kita selesaikan dengan menggunakan teknik substitusi sederhana

Respon

Misalkan: $u = x^2 + 4$

$$du = 2x dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} dx &= \int \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= \int u^{-\frac{1}{2}} du \\ &= 2\sqrt{u} + c \\ &= 2\sqrt{x^2+4} + c \end{aligned}$$

- Suku kedua : $\int \frac{5}{\sqrt{x^2+4}} dx$

Untuk suku kedua, kita bisa menyatakan bentuk sederhana dari $\int \frac{5}{\sqrt{x^2+4}} dx$ menjadi:

$$\int \frac{5}{\sqrt{x^2+4}} dx = 5 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2^2}}$$

Selanjutnya kita carikan rumus dasar integral yang sesuai dengan bentuk $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2^2}}$

Respon

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2^2}}$ identik dengan bentuk rumus dasar integral

$\int \frac{dx}{\sqrt{u^2+a^2}}$, dimana:

$\int \frac{dx}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + c$, sehingga bentuk

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2^2}}$ dapat dinyatakan sebagai:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2^2}} = \ln(u + \sqrt{x^2 + 2^2}) + c$$

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{\sqrt{x^2 + 4}} dx &= 5 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2^2}} \\ &= 5 \ln(u + \sqrt{x^2 + 2^2}) + c \end{aligned}$$

Gabungkan selesaian dari suku pertama dan kedua, sehingga diperoleh:

$$\int \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = 2\sqrt{x^2 + 4} + 5 \ln(u + \sqrt{x^2 + 2^2}) + c$$

2. Dinyatakan bahwa selesaian dari hitung integral $\int \frac{8x+6}{\sqrt{x^2+6x}} dx = 6\sqrt{x^2 + 6x} - 14 \ln(x + 3 + \sqrt{x^2 + 6x}) + c$. Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan tersebut!

Penyelesaian

- Sederhanakan terlebih dahulu bentuk $\frac{8x+6}{\sqrt{x^2+6x}}$

Respon

untuk menyederhakan bentuk $\frac{8x+6}{\sqrt{x^2+6x}}$ tidak dapat kita lakukan dengan cara yang sama dengan contoh 1. Hal ini dikarenakan pada saat kita memisalkan $u = x^2 + 6x$; $du = (2x + 6) dx$. pada pembilang, kita tidak menemukan kesamaan $(2x + 6)$, sehingga harus memunculkan kesamaan tersebut dengan mengoperasikan $8x + 6$ menjadi:

$8x + 6 = 4(2x + 6) - 18$, sehingga bentuk

$$\int \frac{8x+6}{\sqrt{x^2+6x}} dx = \int \frac{4(2x+6)-18}{\sqrt{x^2+6x}} dx$$

- Sederhanakan bentuk $\int \frac{4(2x+6)-18}{\sqrt{x^2+6x}} dx$

Respon

$$\int \frac{4(2x+6)-18}{\sqrt{x^2+6x}} dx = \int \frac{4(2x+6)}{\sqrt{x^2+6x}} dx - \int \frac{18}{\sqrt{x^2+6x}} dx$$

- Tentukan suku – suku yang dihasilkan pada ruas kanan

Respon

Suku pertama: $\int \frac{4(2x+6)}{\sqrt{x^2+6x}} dx$

Suku kedua : $\int \frac{18}{\sqrt{x^2+6x}} dx$

- Tentukan cara atau teknik yang tepat yang dapat digunakan untuk menyelesaikan hitung integral dari masing- masing suku tersebut.

Respon

- Suku pertama: $\int \frac{4(2x+6)}{\sqrt{x^2+6x}} dx$

Untuk suku pertama, dapat kita selesaikan dengan menggunakan teknik substitusi sederhana

Respon

Misalkan: $u = x^2 + 6x$; $du = (2x + 6) dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{4(2x + 6)}{\sqrt{x^2 + 6x}} dx &= \int \frac{4}{\sqrt{u}} du \\ &= 4 \int u^{-\frac{1}{2}} du \\ &= 4\sqrt{x^2 + 6x} + c\end{aligned}$$

- Suku kedua : $\int \frac{18}{\sqrt{x^2 + 6x}} dx$

Untuk suku kedua, kita bisa menyatakan bentuk sederhana dari $\int \frac{18}{\sqrt{x^2 + 6x}} dx$ menjadi:

$$\begin{aligned}\int \frac{18}{\sqrt{x^2 + 6x}} dx &= 18 \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 3)^2 - 9}} \\ &= 18 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2 - 3^2}}\end{aligned}$$

Alasan kita mengubah bentuk $\sqrt{x^2 + 6x} = \sqrt{(x + 3)^2 - 3^2}$ adalah kita ingin menyesuaikan dengan salah satu bentuk rumus dasar integral.

- Selanjutnya kita carikan rumus dasar integral yang sesuai dengan bentuk $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2 - 3^2}}$

Respon

$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2 - 3^2}}$ identik dengan bentuk rumus dasar integral

$\int \frac{dx}{\sqrt{u^2 + a^2}}$, dimana:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + c, \quad \text{sehingga}$$

bentuk $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2 - 3^2}}$ dapat dinyatakan sebagai:

$$\int \frac{18 dx}{\sqrt{(x+3)^2 - 3^2}} = 18 \ln(x + 3 + \sqrt{(x + 3)^2 - 3^2}) + c$$

Gabungkan selesaian dari suku pertama dan kedua, sehingga diperoleh:

$$\int \frac{8x+6}{\sqrt{x^2+6x}} dx = 4\sqrt{x^2 + 6x} - 18 \ln(x + 3 + \sqrt{(x + 3)^2 - 3^2}) + c$$

Selesaian yang dihasilkan berbeda dengan pernyataan yang diberikna, sehingga dapat disimpulkan bahwa pernyataan yang dinyatakan bernilai salah.

3.1.2.2 Integral Memuat Pangkat Pecahan dari Bentuk $a + bx$

Jika di bagian sebelumnya kita membahas terkait hitung integral yang memuat integran bentuk persamaan kuadrat, nah di bagian ini kita akan membahas terkait bentuk integran $a + bx$ jika memiliki pangkat pecahan. Cara penyelesaian hitung integral ini, akan berbeda dengan cara penyelesaian dengan hitung integral yang memuat integran bentuk persamaan kuadrat.

Jika integran memuat pangkat pecahan dari bentuk $a + bx$, ambil pemisalan, misalkan u yang mempunyai pangkat yang sesuai dengan $a + bx$. Sehingga nantinya akan diperoleh bentuk $a + bx$ tanpa pangkat pecahan lagi. Agar lebih jelas, perhatikan contoh di bawah ini.

Contoh Soal

Tentukan apakah $\int \frac{x}{(1+2x)^{\frac{3}{2}}} dx$ dan $\int x^5(1+x)^{\frac{2}{3}}$ dapat diselesaikan dengan menggunakan aturan integral dengan bentuk integran

persamaan kuadrat? kemukakan alasanmu dan kemudian tentukan selesainya!

Penyelesaian

Untuk $\int \frac{x}{(1+2x)^{\frac{3}{2}}} dx$ dan $\int x^5(1+x)^{\frac{2}{3}}$ tidak dapat diselesaikan

dengan menggunakan aturan integral dengan bentuk integran persamaan kuadrat. Hal ini dikarenakan integrannya bukan berbentuk persamaan kuadrat, tetapi berbentuk $a + bx$ dengan

pangkat pecahan. jadi $\int \frac{x}{(1+2x)^{\frac{3}{2}}} dx$ dan $\int x^5(1+x)^{\frac{2}{3}}$ dapat

diselesaikan dengan integral yang membuat bentuk $a + bx$ dengan pangkat pecahan.

a. $\int \frac{x}{(1+2x)^{\frac{3}{2}}} dx$

- Untuk menyelesaikan hitung integral ini, terlebih dahulu kita lihat pangkat pecahan dari bentuk $(1+2x)$.

Respon

Pangkat pecahan dari $(1+2x)$ adalah $\frac{3}{2}$

- Menentukan pemisalan

Respon

Karena pangkatnya $\frac{3}{2}$, maka kita akan membuat pemisalan yang dapat membuat $(1+2x)$ memiliki pangkat 1.

Misalkan:

$$u^2 = 1 + 2x; x = \frac{1}{2}(u^2 - 1); u = (1 + 2x)^{\frac{1}{2}}$$

- Tentukan turunan dari pemisalan yang di buat

Respon

$$u^2 = 1 + 2x$$

$$2u \, du = 2 \, dx; u \, du = dx$$

- Substitusikan pemisalan yang telah dibuat ke dalam

$$\int \frac{x}{(1+2x)^{\frac{3}{2}}} dx$$

Respon

$$\int \frac{x}{(1+2x)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(u^2 - 1)}{(u^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot u \, du$$

- Sederhanakan bentuk $\int \frac{\frac{1}{2}(u^2-1)}{(u^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot u \, du$

Respon

$$= \int \frac{\frac{1}{2}(u^2 - 1)}{(u^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot u \, du$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(u^2 - 1)}{u^3} \cdot u \, du$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{u^2 - 1}{u^2} du$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int \left(\frac{u^2}{u^2} - \frac{1}{u^2} \right) du \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int \frac{u^2}{u^2} du - \int \frac{1}{u^2} du \right]$$

- Selanjutnya selesaikan hitung integral tersebut dengan menggunakan rumus dasar integral yang telah kita pelajari sebelumnya.

Respon

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(1+2x)^{\frac{3}{2}}} dx &= \frac{1}{2} \left[\int \frac{u^2}{u^2} du - \int \frac{1}{u^2} du \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right) + c \\ &= \frac{1}{2} u - \frac{1}{2u} + c\end{aligned}$$

- Substitusikan pemisalan yang telah kita buat di awal tadi

Respon

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(1+2x)^{\frac{3}{2}}} dx &= \frac{1}{2} u - \frac{1}{2u} + c \\ &= \frac{\sqrt{1+2x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+2x}} + c\end{aligned}$$

b. $\int x^2(1+x)^{\frac{2}{3}}$

- Untuk menyelesaikan hitung integral ini, terlebih dahulu kita lihat pangkat pecahan dari bentuk $(1+x)$.

Respon

Pangkat pecahan dari $(1+x)$ adalah $\frac{2}{3}$

- Menentukan pemisalan

Respon

Karena pangkatnya $\frac{2}{3}$, maka kita akan membuat pemisalan yang dapat membuat $(1+2x)$ tidak memiliki pangkat lagi.

Misalkan:

$$u^3 = 1 + x; x = (u^3 - 1); u = (1 + x)^{\frac{1}{3}}$$

- Tentukan turunan dari pemisalan yang di buat

Respon

$$u^3 = 1 + x$$

$$3u^2 du = dx$$

- Substitusikan pemisalan yang telah dibuat ke dalam

$$\int x^2(1+x)^{\frac{2}{3}}$$

Respon

$$\int x^2(1+x)^{\frac{2}{3}} = \int (u^3 - 1)^2(u^3)^{\frac{2}{3}} \cdot 3u^2 du$$

- Sederhanakan bentuk $\int (u^3 - 1)^2(u^3)^{\frac{2}{3}} \cdot 3u^2 du$

Respon

$$= \int (u^3 - 1)^2(u^3)^{\frac{2}{3}} \cdot 3u^2 du$$

$$= \int (u^6 - 2u^3 + 1)(u)^2 3u^2 du$$

$$= 3 \int (u^{10} - 2u^7 + u^4) du$$

$$= 3[\int u^{10} du - \int 2u^7 du + \int u^4 du]$$

- Selanjutnya selesaikan hitung integral tersebut dengan menggunakan rumus dasar integral yang telah kita pelajari sebelumnya.

Respon

$$\int x^2(1+x)^{\frac{2}{3}} = 3 \left[\int u^{10} du - \int 2u^7 du + \int u^4 du \right]$$

$$= 3 \left[\frac{1}{11} u^{11} - \frac{2}{8} u^8 + \frac{1}{5} u^5 \right] + c$$

$$= \frac{3}{11} u^{11} - \frac{2}{8} u^8 + \frac{1}{5} u^5 + c$$

- Substitusikan pemisalan yang telah kita buat di awal tadi

Respon

$$\int x^2(1+x)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{11} u^{11} - \frac{2}{8} u^8 + \frac{1}{5} u^5 + c$$

$$= \frac{3}{11} \sqrt[3]{(1+x)^{11}} - \frac{2}{8} \sqrt[3]{(1+x)^8} + \frac{1}{5} \sqrt[3]{(1+x)^5} + c$$

3.1.2.3 Integral Memuat Pangkat Pecahan dari Bentuk $a + bx^n$

pada pembahasan di poin 3.2.1.2 telah dibahas terkait integral yang memuat pangkat pecahan dari bentuk $a + bx$. Nah, dibagian ini kita akan membahas terkait integral yang memuat pangkat pecahan tetapi dari bentuk $a + bx^n$. Cara yang dapat digunakan dalam menyelesaikan hitung integral yang memuat integral pangkat pecahan dari bentuk $a + bx^n$ adalah sama dengan cara menghitung integral yang memuat pangkat pecahan yang memuat bentuk $a + bx$. Untuk lebih memahami penerapannya, perhatikan contoh di bawah ini.

Contoh Soal

Tentukan selesaian dai hitung integral $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} dx$

Penyelesaian

- Untuk menyelesaikan hitung integral ini, terlebih dahulu kita lihat pangkat pecahan dari bentuk (x^2+4) .

Respon

Pangkat pecahan dari (x^2+4) adalah $\frac{1}{2}$

- Menentukan pemisalan

Respon

Karena pangkatnya $\frac{1}{2}$, maka kita akan membuat pemisalan yang dapat membuat $(x^2 + 4)$ memiliki pangkat 1.

Misalkan:

$$u^2 = x^2 + 4; x^2 = u^2 - 4$$

$$2udu = 2xdx; u du = x dx$$

- Substitusikan pemisalan yang telah dibuat ke dalam $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} dx$

Respon

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} dx = \int \frac{(u^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2} \cdot x dx$$

- Sederhanakan bentuk $\int \frac{(u^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2} \cdot x dx$

Respon

$$= \int \frac{(u^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2} \cdot x dx$$

$$= \int \frac{u}{u^2-4} \cdot u du$$

$$= \int \frac{u^2}{u^2-4} du$$

$$= \int \left(\frac{u^2-4+4}{u^2-4} \right) du$$

$$= \int \left(\frac{u^2-4}{u^2-4} + \frac{4}{u^2-4} \right) du$$

$$= \int du + \int \frac{4}{u^2-4} du$$

- Selanjutnya selesaikan hitung integral tersebut dengan menggunakan rumus dasar integral yang telah kita pelajari sebelumnya.

Respon

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} dx &= \int du + \int \frac{4}{u^2 - 4} du \\&= u + \int \frac{4}{u^2 - 2^2} du \\&= u + \frac{4}{2(2)} \ln \left| \frac{u-2}{u+2} \right| + c \\&= u + \ln \left| \frac{u-2}{u+2} \right| + c\end{aligned}$$

- Substitusikan pemisalan yang telah kita buat di awal tadi

Respon

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} dx = \sqrt{x^2 + 4} + \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} \right| + c$$

RANGKUMAN

1. Dalam penyelesaian hitung integral yang memuat integran berbentuk persamaan kuadrat, usaha yang dapat dilakukan untuk menyelesaikannya yaitu usahakan integran yang berbentuk persamaan kuadrat disederhanakan menjadi bentuk – bentuk yang sesuai dengan rumus – rumus dasar integral.
2. Jika integran memuat pangkat pecahan dari bentuk $a + bx$, ambil pemisalan, misalkan u yang mempunyai pangkat yang sesuai dengan $a + bx$. Sehingga nantinya akan diperoleh bentuk $a + bx$ tanpa pangkat pecahan lagi.
3. Cara yang dapat digunakan dalam menyelesaikan hitung integral yang memuat integran pangkat pecahan dari bentuk $a + bx^n$ adalah sama dengan cara menghitung integral yang memuat pangkat pecahan yang memuat bentuk $a + bx$

LATIHAN

1. Dinyatakan bahwa selesaian dari $\int \frac{x^3}{(x^2-9)^{\frac{4}{3}}} dx$ adalah

$$\frac{3}{2} \ln \sqrt[3]{x^2-9} - \frac{27}{2\sqrt[3]{x^2-9}} + c. \text{ Tentukan:}$$

- a. Aturan integral apa yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan hitung integral di atas? Kemukakan alasanmu!
- b. Gunakan aturan integral yang kamu nyatakan pada poin a di atas untuk menyelesaikan permasalahan hitung integral di atas!
- c. Apakah selesaian yang kamu temukan sama dengan selesaian yang dinyatakan di atas?
 - Jika ya, nyatakan selesaiannya!
 - Jika tidak, nyatakan perbedaannya dengan disertai alasannya!

2. Tentukan apakah $\int x(1+x)^{\frac{2}{3}} dx$ dapat diselesaikan dengan menggunakan aturan integral yang memuat integral dengan bentuk $a + bx$ dengan pangkat pecahan? kemukakan alasanmu dan kemudian tentukan selesainya!

3. Dinyatakan bahwa $\int \frac{(x^2-9)^{\frac{3}{2}}}{x} dx = \frac{1}{3}(x^2-9)^{\frac{3}{2}} - 9\sqrt{x^2-9} + 27 \arctan \frac{\sqrt{x^2-9}}{3} + c$. Tentukan apakah pernyataan tersebut bernilai benar?

- Jika ya, tentukan proses penyelesaian untuk menunjukkan pernyataan tersebut bernilai benar!

- Jika tidak, nyatakan alasan mengapa belum benar dan nyatakan selesai yang benar menurut mu!

4. Perhatikan selesai permasalahan hitung integral di bawah ini:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx &= \int \frac{(u^2 - 3)}{u} (2u du) \\ &= 2 \int (u^2 - 3) du \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} u^3 - 3u \right] + c \\ &= 2 \left(\frac{1}{3} \sqrt{(x+3)^3} - 3\sqrt{x+3} + c \right)\end{aligned}$$

Tentukan:

- a. Aturan integral apakah yang digunakan dalam penyelesaian hitung integral di atas? Kemukakan alasan mu!
 - b. Apakah aturan integral yang digunakan sudah benar?
 - Jika ya, nyatakan alasan mu!
 - Jika tidak, nyatakan alasan mu dan tuliskan jawaban yang benar!
 - c. Apakah ada cara lain atau aturan integral lain yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan hitung integral di atas? Jika ada nyatakan selesalain permasalahan hitung integral di atas dengan cara tersebut dan nyatakan cara mana yang lebih efektif dengan menyertakan alasan mu!
5. Tentukan selesai dari hitung integral berikut ini:

a. $\int \frac{x}{(4-3x)^{\frac{4}{3}}} dx$

b. $\int \frac{\sqrt{4x+9}}{x} dx$

c. $\int \frac{dx}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$

d. $\int \frac{x^3}{(x^2+9)^{\frac{4}{3}}} dx$

e. $\int \frac{4x-7}{\sqrt{6x-x^2}} dx$

3.2. Teknik Integrasi Parsial

3.2.1 Integrasi Parsial dengan Rumus

Mungkin pada saat kita menyelesaikan persoalan hitung integral, maka kita akan menemukan suatu fungsi integran yang pengintegralannya tidak dapat dibawa ke bentuk dasar. Salah satu cara untuk menyelesaikannya adalah dengan metode integral parsial. Integral parsial didasarkan pada pengintegralan turunan dua fungsi. Jika pada derivatif ada aturan rantai dan perkalian, maka pada integral akan berlaku juga aturan perkalian dan rantai. Berikut akan disajikan hubungan dua aturan tersebut.

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$f(x)g'(x) = (f(x) \cdot g(x))' - f'(x)g(x)$, jika bagian sisi kiri dan kanan diintegralkan, maka akan diperoleh:

$$\int f(x)g'(x) dx = \int (f(x) \cdot g(x))' dx - \int f'(x)g(x) dx$$

Berdasarkan teorema dasar kalkulus, maka $\int (f(x) \cdot g(x))' dx = f(x)g(x)$. Dengan demikian, maka akan diperoleh:

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

Bila $u = f(x)$; $du = f'(x) dx$, dan $v = g(x)$; $dv = g'(x) dx$, maka jika disubstitusikan akan menjadi:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Integral parsial dengan rumus dapat digunakan ketika terdapat dua bentuk fungsi yang berbeda yang tidak terlihat berhubungan satu sama lain. Agar kita dapat menggunakan rumus integral parsial di atas, bentuk integran (fungsi) dari integral yang diketahui harus dibuat menjadi dua bagian, satu bagian dimisalkan sebagai u dan bagian yang lain bersama-sama dengan dx dimisalkan dengan dv . Menentukan pemisalan fungsi yang mewakili u jika diturunkan maka hasilnya haruslah lebih sederhana dari u itu sendiri.

3.2.2 Integral Parsial dengan Metode Tabulasi

Apabila kita menggunakan teknik integrasi berupa integral parsial dengan rumus dalam menyelesaikan sebuah persoalan hitung integral yang mengharuskan kita melakukan proses perhitungannya secara berulang kali, maka kemungkinan kita dalam melakukan kesalahan cukuplah besar. Oleh sebab itu, teknik integrasi berupa integral parsial, dapat digunakan dengan menggunakan metode tabulasi. Perhatikan bentuk integral berikut ini:

$$\int f(x)g(x)dx$$

Misalkan fungsi $f(x)$ dapat dideferensialkan sampai ke $(n+1)$ kali dan $g(x)$ dapat diintegrasikan sampai $(n+1)$ kali. Jika kita misalkan $f^{(i)}(x)$ adalah turunan dari fungsi $f(x)$ sampai ke- i dan jika kita misalkan $g^{(-i)}(x)$ adalah integral dari fungsi $g(x)$ secara berulang

sampai ke- i , maka integral parsial sampai ke $(n+1)$ kali dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \int f(x)g(x)dx &= f(x)g^{(-1)}(x) - f^1(x)g^{(-2)}(x) + f^2(x)g^{(-3)}(x) \\ &\quad - \dots \dots + (-1)^n f^n(x)g^{(-n-1)}(x) \\ &\quad + (-1)^{n+1} \int f^{(n+1)}g^{(-n-1)}(x)dx \\ \int f(x)g(x)dx &= \sum_{k=1}^n (-1)^k f^k(x)g^{(-k-1)}(x) \\ &\quad + (-1)^{n+1} \int f^{(n+1)}g^{(-n-1)}(x)dx \end{aligned}$$

Proses hitung integral menggunakan Integral parsial dengan rumus di atas, dapat diperoleh juga dengan menggunakan metode tabulasi yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

Tanda	Diferensial	Integral
+	$f(x)$	$g(x)$
-	$f^1(x)$	$g^{(-1)}(x)$
+	$f^2(x)$	$g^{(-2)}(x)$
.....		
$(-1)^n$	$f^{(n)}(x)$	$g^{(-n)}(x)$
$(-1)^{n+1}$	$f^{(n+1)}(x)$	$g^{(-n-1)}(x)$

Perhitungan dengan menggunakan integral parsial metode tabulasi ini dihentikan apabila sudah ditemukan $f^{(n+1)}(x) = 0$.

Contoh Soal**Perhatikan Permasalahan di Bawah Ini !**

Fariz diharuskan menyelesaikan persoalan terkait integral tak tentu di bawah ini:

$$a. \int x^3 \cos 2x \, dx = \text{--- --}$$

$$b. \int x^3 \ln x \, dx = \text{--- --}$$

Fariz menyatakan bahwa persoalan di atas tidak dapat diselesaikan dengan menggunakan metode substitusi, tetapi dapat diselesaikan menggunakan teknik integrasi dengan integral parsial. Selanjutnya Fariz menyatakan bahwa persoalan nomor 1 hanya dapat diselesaikan dengan menggunakan integral parsial dengan rumus, sedangkan persoalan nomor 2 hanya dapat diselesaikan dengan menggunakan integral parsial metode tabulasi.

Coba kalian amati permasalahan di atas, apakah pernyataan yang dinyatakan Fariz di atas bernilai benar atau salah? Berikan alasan. Selanjutnya identifikasilah apakah teknik integrasi dengan rumus dan metode tabulasi dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan nomor 1 dan 2, serta apakah selesaian yang dihasilkan sama?

Untuk dapat menentukan apakah pernyataan Fariz tentang persoalan yang diberikan di atas tidak dapat diselesaikan dengan metode substitusi bernilai benar atau salah, maka lakukan langkah-langkah yang sudah kalian pelajari pada bahan ajar sebelumnya.

Selanjutnya untuk dapat menentukan apakah teknik integrasi dengan rumus dan metode tabulasi dapat digunakan untuk ke dua persoalan di atas, maka mari kita lakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Selesaikan persoalan yang paling dianggap mudah terlebih dahulu, misal kita akan menyelesaikan persoalan nomor 2 terlebih dahulu.
2. Perhatikan persoalan nomor 2, $\int x^3 \ln x \, dx$. untuk dapat menggunakan teknik integrasi integral parsial dengan rumus, maka kita harus dapat menentukan mana fungsi yang tepat untuk didiferensialkan dan mana fungsi yang tepat untuk diintegrasikan. Dari persoalan, misalkan kita ambil fungsi $\ln x$ untuk diintegrasikan dan fungsi x^3 untuk didiferensialkan.

Misalkan $u = x^3$; maka $du = 3x^2 \, dx$

Misalkan $dv = \ln x \, dx$; maka $\int dv = \int \ln x \, dx$; untuk menyelesaikan hitung integral tersebut, maka kita harus dapat menggunakan metode substitusi dengan memisalkan $t = \ln x$; maka $dt = \frac{1}{x} dx$; $x \, dt = dx$. Selanjutnya substitusikan t dan dt

yang sudah diperoleh ke $\int \ln x \, dx$, sehingga diperoleh: $\int t \times dt$.

Perhatikan bentuk integral baru yang kita hasilkan, apakah menjadi semakin mudah untuk diselesaikan atau semakin sulit?.

Jika semakin sulit, maka pemisalan kita dalam menentukan fungsi mana yang akan diintegrasikan dan didiferensialkan kurang tepat. Oleh sebab itu, lakukan kembali aktivitas untuk

menentukan fungsi mana yang akan diintegalkan dan yang akan didiferensialkan.

Misalkan $u = \ln x$; maka $du = \frac{1}{x} dx$

Misalkan $dv = x^3 dx$; maka $\int dv = \int x^3 dx$; $v = \frac{1}{4}x^4 + c$

3. Substitusikan hasil dari fungsi yang sudah diintegalkan dan didiferensialkan ke dalam rumus integral parsial.

Integral parsial dengan rumus:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln x dx &= (\ln x) \left(\frac{1}{4}x^4 \right) - \int \left(\frac{1}{4}x^4 \right) \left(\frac{1}{x} \right) dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + c \end{aligned}$$

4. Selanjutnya mari kita selesaikan persoalan nomor 2 dengan metode tabulasi dengan langkah-langkah sebagai berikut:

- a. Buatlah tabel yang berisi tanda, diferensial, integral.

Tanda	Diferensial	Integral
-------	-------------	----------

- b. Tentukan mana fungsi yang akan diintegalkan dan mana fungsi yang akan didiferensialkan.

Tanda	Diferensial	Integral
+ →	$f(x) = \ln x$	$g(x) = x^3$
- →	$f^1(x) = 1/x$	$g^{(-1)}(x) = \frac{1}{4}x^4 + c$
+ →	$f^2(x) = 0$	$g^{(-2)}(x) = \frac{1}{16}x^5 + c$

- c. Selanjutnya nyatakan selesaiannya sesuai dengan penjabaran materi tentang integral parsial dengan metode tabulasi yang telah dijelaskan di atas.

$$\begin{aligned}\int x^3 \ln x \, dx &= \frac{1}{4} x^4 \ln x - \left(\frac{1}{16} x^5 \right) \left(\frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{1}{4} x^4 \ln x - \left(\frac{1}{16} x^4 \right) + c\end{aligned}$$

Berdasarkan paparan di atas, maka dapat ditentukan bahwa teknik integrasi berupa integral parsial dengan rumus dan dengan metode tabulasi dapat digunakan untuk menentukan selesaian dari persoalan nomor 2. Jadi silakan tentukan sendiri apakah pernyataan yang dinyatakan oleh Fariz bernilai benar atau salah.

Selanjutnya silakan lakukan aktivitas seperti di kegiatan ayo mulai bekerja untuk menentukan selesaian dari persoalan nomor 1. Setelah melakukan aktivitas di atas, maka coba kalian temukan selesaian dari persoalan di bawah ini:

Tentukan selesaian dari $\int x^3 3^{x^2} dx$

Dalam menemukan selesaian persoalan pada kegiatan **ayo lakukan inovasi dan maknai hasilnya**, apakah cara yang digunakan dalam menentukan selesaiannya dapat dilakukan dengan menggunakan integral parsial dengan rumus dan dengan metode tabulasi? Berikan alasan!. Tentukan kapankah kita diharuskan menggunakan integral parsial dengan rumus dan metode tabulasi? Berikan alasan!

RANGKUMAN

1. Integral Parsial dengan rumus

Berdasarkan teorema dasar kalkulus, maka $\int (f(x).g(x))' dx = f(x)g(x)$. Dengan demikian, maka akan diperoleh:

$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$. Bila $u = f(x)$; $du = f'(x) dx$, dan $v = g(x)$; $dv = g'(x) dx$, maka jika disubstitusikan akan menjadi: $\int u dv = uv - \int v du$

2. Proses hitung integral menggunakan Integral parsial dengan rumus di atas, dapat diperoleh juga dengan menggunakan metode tabulasi yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

Tanda	Diferensial	Integral
+	$\longrightarrow f(x)$	$g(x)$
-	$\longrightarrow f'(x)$	$g^{(-1)}(x)$
+	$\longrightarrow f''(x)$	$g^{(-2)}(x)$
.....		
$(-1)^n$	$\longrightarrow f^{(n)}(x)$	$g^{(-n)}(x)$
$(-1)^{n+1}$	$f^{(n+1)}(x)$	$g^{(-n-1)}(x)$

Perhitungan dengan menggunakan integral parsial metode tabulasi ini dihentikan apabila sudah ditemukan $f^{(n+1)}(x) = 0$.

3. Untuk dapat menggunakan teknik integrasi substitusi, maka ada beberapa hal yang harus diperhatikan:
- Jika persoalan integral yang diberikan tidak dapat secara langsung diselesaikan dengan menggunakan rumus dasar integral, juga tidak dapat diselesaikan dengan menggunakan

metode substitusi, maka salah satu cara yang dapat dilakukan adalah dengan menggunakan teknik integrasi berupa integral parsial dengan rumus dan dengan metode tabulasi.

- b. Dalam menggunakan teknik integrasi berupa integral parsial dengan rumus dan dengan metode tabulasi, maka terlebih dahulu harus ditentukan terlebih dahulu mana fungsi yang harus diintegralkan dan mana fungsi yang harus didiferensialkan.
- c. Dalam menentukan mana fungsi yang harus diintegralkan dan mana fungsi yang harus didiferensialkan, maka kita harus memastikan bahwa proses pengintegralan dan pendiferensialan fungsi yang sudah ditentukan harus dapat membuat persoalan yang diberikan menjadi semakin mudah untuk diselesaikan.

LATIHAN

1. Dinyatakan bahwa $\int x e^{-x} dx$ dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik integrasi metode substitusi. Tentukan apakah pernyataan tersebut bernilai benar atau salah!. Jika benar, maka nyatakan selesaiannya dengan menggunakan metode substitusi tersebut, sedangkan jika menurut mu masih salah, nyatakan teknik integrasi apa yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan tersebut serta gunakan teknik integrasi tersebut untuk menyatakan selesaiannya!.
2. Dinyatakan bahwa selesaian dari $\int e^{2x} \sin x dx = \frac{1}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) + C$. Nyatakan proses untuk mendapatkan selesaian tersebut!
3. Pada hitung integral $\int e^{2x} \sin x dx$, diambil dua pemisalan:
 - a. $u = e^{2x}; dv = \sin x dx$
 - b. $u = \sin x; dv = e^{2x} dx$Nyatakan selesaian dari hitung integral di atas dengan menggunakan dua pemisalan di atas!.
4. Lengkapilah selesian hitung integral di bawah ini!

$$\int \sec^3 x dx$$

misalkan: $u = \sec x; du = \dots\dots\dots$

$$dv = \sec^2 x; v = \dots\dots\dots$$

$$\int \sec^3 x dx = (\sec x)(\dots\dots) - \int (\dots\dots)(\tan^2 x) dx$$

$$\int \sec^3 x \, dx = (\sec x)(\dots\dots\dots) - \int \dots\dots\dots^3 x \, dx - \int \sec x \, dx$$

$$\dots\dots\dots \int \sec^3 x \, dx = (\sec x)(\dots\dots\dots) - \int (\dots\dots\dots) dx$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2}(\sec x)(\dots\dots\dots) - \ln|\sec x + (\dots\dots\dots)| + c$$

5. Perhatikan selesaiian hitung integral di bawah ini!

$$\int x^3 \ln x \, dx$$

$$\text{Misalkan: } u = \ln x; \, du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = x^3; \, v = \frac{1}{3}x^3$$

$$\int x^3 \ln x \, dx = \frac{1}{3}x \ln x - \int x^3 \frac{1}{x} dx$$

$$\int x^3 \ln x \, dx = \frac{1}{3}x \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c$$

Apakah menurut kamu proses selesaiian di atas sudah benar?jika ya, nyatakan ulang proses penyelesaiannya menggunakan teknik integrasi integral parsial metode tabulasi. Sedangkan apabila menurut mu, proses selesaiian dia atas masih salah, maka tentukan di mana bagian yang salah, dan nyatakan selesaiian yang benar dengan menggunakan teknik integrasi integral parsial metode tabulasi!

3.3 Teknik Integrasi dari Fungsi Trigonometri

Salah satu bentuk dari integran dalam hitung integral adalah integran yang berbentuk fungsi trigonometri. Dalam menyelesaikan hitung integral yang melibatkan integran dengan fungsi trigonometri, sering sekali kita mengalami kendala – kendala. Dari beberapa kendala yang muncul, maka dapat diidentifikasi diantaranya:

- a. Apabila hitung integralnya berbentuk $\int \sin^n u \, du$ atau $\int \cos^n u \, du$
- b. Apabila hitung integralnya berbentuk $\int [\sin^m u \cdot \cos^n u] \, du$
- c. Apabila hitung integralnya berbentuk $\int \tan^n u \, du$ atau $\int \cot^n u \, du$
- d. Apabila hitung integralnya berbentuk $\int \sec^n u \, du$ atau $\int \csc^n u \, du$
- e. Apabila hitung integralnya berbentuk $\int [\tan^m u \cdot \sec^n u] \, du$
- f. Apabila hitung integralnya berbentuk $\int [\cot^m u \cdot \csc^n u] \, du$
- g. Apabila hitung integralnya berbentuk $\int [\sin mu \cos nu] \, du$
- h. Apabila hitung integralnya berbentuk $\int [\sin mu \sin nu] \, du$
- i. Apabila hitung integralnya berbentuk $\int [\cos mu \cos nu] \, du$

Untuk dapat mempermudah dalam penyelesaian hitung integral dengan integrannya fungsi trigonometri, maka disajikanlah beberapa teknik pengintegralan yang melibatkan integran fungsi trigonometri. Namun sebelum menyajikan teknik pengintegralan yang melibatkan integran fungsi trigonometri, ada beberapa hal yang harus di ingatkan terlebih dahulu. Hal tersebut adalah dalam

penyelesaian hitung integral dengan menggunakan teknik pengintegralan yang melibatkan integran fungsi trigonometri, banyak sekali menggunakan rumus – rumus dasar fungsi trigonometri. Oleh sebab itu, alangkah baiknya kita memaparkan terlebih dahulu rumus – rumus dasar fungsi trigonometri tersebut, diantaranya:

a. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

b. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

c. $1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

d. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

e. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

f. $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

g. $\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x - y) + \sin(x + y)]$

h. $\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$

i. $\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)]$

j. $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{1}{2} x$

k. $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{1}{2} x$

l. $1 + \sin x = 1 + \cos(\frac{1}{2} \pi - x)$

m. $1 - \sin x = 1 - \cos(\frac{1}{2} \pi - x)$

Berikut akan disajikan beberapa selesain hitung integral yang menggunakan rumus – rumus dasar trigonometri tersebut.

1. Tentukanlah apakah pernyataan terkait selesaian hitung integral trigonometri di bawah ini bernilai atau salah!. Jika menurut mu benar, sajikan proses selesaiannya, dan jika menurut mu salah, sajikan juga bagian mana yang salah, dan sajikan selesaiannya yang benar.

a. $\int \cos^3 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{6} \sin^3 2x + c$

b. $\int \tan^5 x \, dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\sec x| + c$

2. Lengkapilah selesaian hitung integral di bawah ini

$$\begin{aligned} \int \cot 3x \cdot \operatorname{cosec}^4 3x \, dx &= \int \cot 3x \cdot \operatorname{cosec}^2 3x \cdot (\dots \dots \dots) dx \\ &= \int \cot 3x \cdot \operatorname{cosec}^2 3x \cdot (1 + \dots \dots \dots) dx \\ &= \int \cot 3x \cdot \operatorname{cosec}^2 3x \, dx + \\ &\quad \int (\dots \dots \dots) dx \end{aligned}$$

Misalkan: $u = \cot 3x$; $du = \dots \dots \dots dx$

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec}^2 3x \, dx &= \frac{\dots}{\dots} du \\ &= -\frac{\dots}{\dots} \int u \, du - \frac{1}{3} \int \dots \dots \dots du \\ &= -\frac{\dots}{\dots} \frac{u^2}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\dots}{\dots} + c \\ &= -\frac{1}{6} \cot^2 3x - \frac{1}{12} \cot^4 3x + c \end{aligned}$$

Penyelesaian

1. untuk soal nomor 1a dan 1b kita belum bisa menentukan secara langsung apakah selesaian yang disajikan sudah benar atau belum. Langkah yang harus kita lakukan adalah mencoba untuk mencari selesaian hitung integral tersebut dengan menggunakan

rumus – rumus dasar fungsi trigonometri dan teknik integrasi substitusi dna parsial yang telah kita pelajari sebelumnya.

- a. Untuk menyelesaikan $\int \cos^3 2x \, dx$, langkah awal yang dapat kita lakukan adalah dengan menyatakan bentuk sederhana dari integran $\cos^3 2x$, yang nantinya akan dapat kita ubah dengan menggunakan rumus dasar trigonometrinya.

$$\cos^3 2x = \cos^2 2x \cdot \cos 2x$$

Ingat di rumus dasar trigonometri, kita telah menyatakan sebuah persamaan, dimana:

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x &= 1; \cos^2 2x + \sin^2 2x = 1; \cos^2 2x \\ &= 1 - \sin^2 2x \end{aligned}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \int \cos^3 2x \, dx &= \int \cos^2 2x \cdot \cos 2x \, dx \\ &= \int (1 - \sin^2 2x) \cdot \cos 2x \, dx \\ &= \int (\cos 2x - \sin^2 2x \cdot \cos 2x) dx \\ &= \int \cos 2x \, dx - \int \sin^2 2x \cdot \cos 2x \, dx \end{aligned}$$

Sampai di sini, kita dapat menggunakan teknik integrasi substitusi.

Misalkan: $u = \sin 2x$

$$du = 2 \cos 2x \, dx$$

$$\begin{aligned} dx &= \frac{du}{2 \cos 2x} \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x - \int u^2 \cos 2x \cdot \frac{du}{2 \cos 2x} \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x - \int u^2 \frac{du}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \int u^2 du \\
&= \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cdot \frac{u^3}{3} + c \\
&= \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{6} \cdot \sin^3 2x + c
\end{aligned}$$

Kita mendapatkan selesaiannya adalah:

$$\int \cos^3 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{6} \sin^3 2x + c$$

Selesaian yang dinyatakan di soal ternyata belum benar, kesalahannya terlebak di tanda operasinya: $\int \cos^3 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{6} \sin^3 2x + c$

- b. Untuk menyelesaikan $\int \tan^5 x \, dx$, langkah awal yang dapat kita lakukan adalah dengan menyatakan bentuk sederhana dari integran $\tan^5 x$, yang nantinya akan dapat kita ubah dengan menggunakan rumus dasar trigonometrinya.

$$\tan^5 x = \tan^3 x \cdot \tan^2 x$$

Ingat di rumus dasar trigonometri, kita telah menyatakan sebuah persamaan, dimana:

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x; \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
\int \tan^5 x \, dx &= \int \tan^3 x \cdot \tan^2 x \, dx \\
&= \int \tan^3 x (\sec^2 x - 1) \, dx \\
&= \int (\tan^3 x \cdot \sec^2 x - \tan^3 x) \, dx \\
&= \int (\tan^3 x \cdot \sec^2 x) \, dx - \int \tan^3 x \, dx
\end{aligned}$$

Bentuk integran $\tan^3 x$ kita ubah menjadi:

$$\tan^3 x = \tan x \cdot \tan^2 x$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} &= \int (\tan^3 x \cdot \sec^2 x) dx - \int \tan x \cdot \tan^2 x dx \\ &= \int (\tan^3 x \cdot \sec^2 x) dx - \int \tan x \cdot (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int (\tan^3 x \cdot \sec^2 x) dx - [\int (\tan x \cdot \sec^2 x - \tan x) dx] \\ &= \int (\tan^3 x \cdot \sec^2 x) dx - \int (\tan x \cdot \sec^2 x) dx + \int \tan x dx \end{aligned}$$

Sampai di sini, kita dapat menggunakan teknik integrasi substitusi.

$$\text{Misalkan: } u = \tan x; du = \sec^2 x dx; dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

Kita substitusikan pemisalan tersebut ke $\int (\tan^3 x \cdot \sec^2 x) dx - \int (\tan x \cdot \sec^2 x) dx + \int \tan x dx$, sehingga:

$$\begin{aligned} &= \int u^3 \cdot \sec^2 x \cdot \frac{du}{\sec^2 x} - \int u \cdot \sec^2 x \cdot \frac{du}{\sec^2 x} + \int \tan x dx \\ &= \int u^3 du - \int u du + \int \tan x dx \\ &= \frac{1}{4} u^4 - \frac{1}{2} u^2 + \ln|\sec x| + c \\ &= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\sec x| + c \end{aligned}$$

Kita mendapatkan selesai:

$$\int \tan^5 x dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\sec x| + c$$

Selesaian yang dinyatakan di soal ternyata bernilai benar.

2. Untuk melengkapi selesaian yang diberikan, dapat kita lakukan sama dengan selesaian pada soal nomor 1a dan 1b.

Kita dapat mengubah bentuk integran $\operatorname{cosec}^4 3x$ menjadi:

$$\operatorname{cosec}^4 3x = \operatorname{cosec}^2 3x \cdot \operatorname{cosec}^2 3x$$

Sehingga untuk baris pertama dari penyelesaian yang diberikan, isian titik – titik nya adalah: $\operatorname{cosec}^2 3x$

$$\int \cot 3x \cdot \operatorname{cosec}^4 3x \, dx = \int \cot 3x \cdot \operatorname{cosec}^2 3x \cdot (\operatorname{cosec}^2 3x) \, dx$$

Untuk mengisi titik – titik pada baris ke dua, dapat kita lakukan memasukkan rumus dasar trigonometri, dimana:

$$\operatorname{cosec}^2 3x = 1 + \cot^2 3x$$

Sehingga isian titik - titik pada baris kedua menjadi:

$$= \int \cot 3x \cdot \operatorname{cosec}^2 3x \cdot (1 + \cot^2 3x) \, dx$$

Untuk baris ke tiga, dapat kita lakukan dengan proses:

$$ab(1+b) = ab + ab^2$$

$$\begin{aligned} \cot 3x \cdot \operatorname{cosec}^2 3x \cdot (1 + \cot^2 3x) \\ = \cot 3x \cdot \operatorname{cosec}^2 3x + \cot^3 3x \cdot \operatorname{cosec}^2 3x \end{aligned}$$

jadi isian untuk baris ke tiga adalah:

$$= \int \cot 3x \cdot \operatorname{cosec}^2 3x \, dx + \int (\cot^3 3x \cdot \operatorname{cosec}^2 3x) \, dx$$

Selanjutnya untuk mengisi titik – titik di pemisalan, kita cukup mengingat turunan dari $\cot 3x$, sehingga:

$$\begin{aligned} \text{Misalkan: } u = \cot 3x; \, du &= -3\operatorname{cosec}^2 3x \, dx; \, \operatorname{cosec}^2 3x \, dx = \\ &-\frac{du}{3} \end{aligned}$$

Untuk baris selanjutnya, kita substitusikan pemisalan yang telah kita lakukan pada baris sebelumnya, sehingga:

$$= \int u \cdot -\frac{du}{3} + \int u^3 \cdot -\frac{du}{3}$$

$$= -\frac{1}{3} \int u \, du - \frac{1}{3} \int u^3 \, du$$

Untuk langkah selanjutnya, kita dapat menggunakan konsep dasar integral untuk menghitung integral $\int u \, du$ dan $\int u^3 \, du$, sehingga:

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{u^2}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{u^4}{4} + c$$

Selanjutnya kita substitusikan pemisalan $u = \cot 3x$, sehingga:

$$= -\frac{1}{6} \cot^2 3x - \frac{1}{12} \cot^4 3x + c$$

Di atas sudah kita paparkan penyelesaian hitung integral yang melibatkan integran fungsi trigonometri dengan menggunakan rumus dasar trigonometri dan metode substitusi. Berikut akan disajikan teknik pengintegralan yang menggunakan integran fungsi trigonometri.

3.3.1 Integral Trigonometri dalam Bentuk $\int \sin^n u \, du$ atau $\int \cos^n u \, du$

Bentuk integran yang digunakan dalam integral tersebut adalah $\sin^n u$ atau $\cos^n u$. Pangkat n yang digunakan memiliki beberapa kemungkinan, yaitu bisa n nya bernilai genap dan bisa jadi n nya bernilai ganjil. Oleh sebab itu, berikut akan disajikan beberapa aturan, untuk n yang memenuhi kemungkinan tersebut, untuk n ganjil dan untuk n genap.

Kasus 1: untuk n ganjil

Apabila n ganjil, sederhanakanlah integran dengan menggunakan kesamaan:

$$\sin^2 u + \cos^2 u = 1.$$

Untuk n ganjil, kita buat pemisalkan $n = 2k + 1$, sehingga untuk $\sin^n u$ dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}\sin^n u &= \sin^{2k+1} u \\ &= (\sin^2 u)^k \cdot \sin u \\ &= (1 - \cos^2 u)^k \sin u\end{aligned}$$

Kita misalkan lagi:

$$t = \cos u, dt = -\sin u du$$

sehingga integral dengan integran $\sin^n u$ di atas dapat dihitung dengan pendekatan:

$$\begin{aligned}\int \sin^n u du &= \int (1 - \cos^2 u)^k \sin u du \\ &= \int (1 - t^2)^k (-dt)\end{aligned}$$

Sedangkan untuk integral dengan integran $\cos^n u$ dapat kita lakukan dengan membuat persamaan:

$$\begin{aligned}\cos^n u &= \cos^{2k+1} u \\ &= (1 - \sin^2 u)^k \cos u\end{aligned}$$

Selanjutnya kita buat pemisalan:

$$t = \sin u, dt = \cos u du$$

Sehingga integral dengan integran $\cos^n u$ dapat dihitung dengan pendekatan:

$$\begin{aligned}\int \cos^n u du &= \int (1 - \sin^2 u)^k \cos u du \\ &= \int (1 - t^2)^k (dt)\end{aligned}$$

Kasus 2: untuk n genap

Apabila n genap sederhanakanlah integral dengan menggunakan kesamaan $\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$ dan $\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$

Untuk n genap, kita buat pemisalkan $n = 2k$, sehingga untuk $\sin^n u$ dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}\sin^n u &= \sin^{2k} u \\ &= \frac{1 - \cos 2u}{2}\end{aligned}$$

sehingga integral dengan integran $\sin^n u$ di atas dapat dihitung dengan pendekatan:

$$\begin{aligned}\int \sin^n u \, du &= \int \sin^{2k} u \, du \\ &= \int \frac{1 - \cos 2u}{2} \, du \\ &= \int \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos 2u}{2} \right] \, du \\ &= \frac{1}{2} \int du - \frac{1}{2} \int \cos 2u \, du\end{aligned}$$

Selanjutnya untuk integran $\cos^n u$, n genap, dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}\cos^n u &= \cos^{2k} u \\ &= \frac{1 + \cos 2u}{2}\end{aligned}$$

sehingga integral dengan integran $\cos^n u$ di atas dapat dihitung dengan pendekatan:

$$\begin{aligned}\int \cos^n u \, du &= \int \cos^{2k} u \, du \\ &= \int \frac{1 + \cos 2u}{2} \, du \\ &= \int \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos 2u}{2} \right] \, du \\ &= \frac{1}{2} \int du + \frac{1}{2} \int \cos 2u \, du\end{aligned}$$

Agar lebih dapat memahami penggunaan teknik pengintegralan untuk integran $\sin^n u$ dan $\cos^n u$, perhatikan beberapa contoh di bawah ini.

Contoh Soal

1. Tentukanlah $\int \sin^3 x \, dx$

Penyelesaian:

Untuk dapat menyelesaikan hitung integral tersebut, langkah awal yang harus kita lakukan dengan beberapa tahapan, diantaranya yaitu:

- a. Memperhatikan bentuk integran yang diberikan. Pada soal integran yang diberikan adalah $\sin^3 x$
- b. Selanjutnya perhatikan pangkat dari integran yang diberikan. $\sin^3 x$ memiliki pangkat ganjil.
- c. Tentukan pendekatan yang dapat digunakan untuk menyelesaikan hitung integral dengan integran $\sin^3 x$, untuk n nya ganjil. Berdasarkan penjelasan di atas, dinyatakan bahwa pendekatan: $\int \sin^n u \, du = \int (1 - \cos^2 u)^k \sin u \, du$

$$= \int (1 - t^2)^k (-dt)$$
- d. Untuk dapat menggunakan pendekatan tersebut, langkah awal yang dapat kita lakukan adalah dengan menyatakan bentuk sederhana dari $\sin^3 x$:

$$\sin^3 x = \sin^2 x \sin x$$
- e. Selanjutnya kita gunakan kesamaan identitas trigonometri untuk $\sin^2 x$, dimana $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, sehingga:

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \sin^2 x \sin x \\ &= (1 - \cos^2 x) \sin x\end{aligned}$$

- f. Berikutnya kita buat pemisalan untuk $\cos x$, dan menentukan turunan dari pemisalan tersebut, dimana:

$$u = \cos x ; du = -\sin x dx; -du = \sin x dx$$

- g. Substitusikan pemisalan yang telah di buat, ke dalam persamaan:

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x dx &= \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx \\ &= \int (1 - u^2)(-du) \\ &= \int (u^2 - 1)(du) \\ &= \int u^2 du - \int du \\ &= \frac{1}{3}u^3 - u + c\end{aligned}$$

- h. Substitusikan kembali $u = \cos x$, sehingga:

$$\int \sin^3 x dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + c$$

2. Tentukanlah $\int \sin^4 x dx$

Penyelesaian:

Untuk dapat menyelesaikan hitung integral tersebut, langkah awal yang harus kita lakukan dengan beberapa tahapan, diantaranya yaitu:

- a. Memperhatikan bentuk integran yang diberikan. Pada soal integran yang diberikan adalah $\sin^4 x$

b. Selanjutnya perhatikan pangkat dari integran yang diberikan. $\sin^4 x$ memiliki pangkat genap.

c. Tentukan pendekatan yang dapat digunakan untuk menyelesaikan hitung integral dengan integran $\sin^4 x$, untuk n nya genap. Berdasarkan penjelasan di atas, dinyatakan bahwa pendekatan:

$$\begin{aligned}\int \sin^n u \, du &= \int \sin^{2k} u \, du \\ &= \int \frac{1 - \cos 2u}{2} \, du \\ &= \int \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos 2u}{2} \right] du \\ &= \frac{1}{2} \int du - \frac{1}{2} \int \cos 2u \, du\end{aligned}$$

d. Untuk dapat menggunakan pendekatan tersebut, langkah awal yang dapat kita lakukan adalah dengan menyatakan bentuk sederhana dari $\sin^4 x$:

$$\sin^4 x = \sin^{(2)(2)} x = (\sin^2 x)^2$$

e. Selanjutnya kita gunakan kesamaan identitas trigonometri untuk $\sin^2 x$, dimana $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, sehingga:

$$\begin{aligned}\sin^4 x &= (\sin^2 x)^2 \\ &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2\end{aligned}$$

f. Substitusikan persamaan yang telah kita peroleh pada poin m, sehingga diperoleh:

$$\int \sin^4 x \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx$$

g. Sederhanakan $\left(\frac{1-\cos 2u}{2}\right)^2$ dengan cara memfaktorkan,

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 &= \int \left[\left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right) \right] dx \\
 &= \int \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \right) \right] dx \\
 &= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x \right) dx \\
 &= \int \frac{1}{4} dx - \int \frac{1}{2} \cos 2x dx + \int \frac{1}{4} \cos^2 2x dx \\
 &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \int \frac{1+\cos 4x}{2} dx \\
 &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + C \\
 &= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C
 \end{aligned}$$

3.3.2 Integral Trigonometri dalam Bentuk $\int \sin^m u \cos^n u du$

Dari beberapa kendala yang telah di paparkan sebelumnya dalam penyelesaian hitung integral yang melibatkan integran fungsi trigonometri yaitu bentuk $\sin^m u \cos^n u$. Oleh karena itu, berikut akan disajikan teknik pengintegralan yang melibatkan integran fungsi trigonometri tersebut.

Kasus 1: untuk m atau n ganjil

Apabila salah satu dari m atau n ganjil sederhanakanlah integran dengan kesamaan $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$. Bilamana m ganjil, misalnya $m = 2k + 1$ dan n sembarang, tulislah fungsi sinus yang pangkat ganjil menjadi:

$$\sin^m u = \sin^{2k+1} u = (1 - \cos^2 u)^k \sin u$$

selanjutnya ambil substitusi:

$$t = \cos u, dt = -\sin u \, du \text{ atau } \sin u \, du = -dt$$

sehingga integral yang melibatkan integran $\sin^m u \cos^n u$ dengan sinusnya berpangkat ganjil dapat dihitung dengan pendekatan:

$$\begin{aligned} \int \sin^m u \cos^n u \, du &= \int (1 - \cos^2 u)^k \cos^n u \sin u \, du \\ &= \int (1 - t^2)^k t^n (-dt) \end{aligned}$$

Sedangkan untuk cosinus yang berpangkat ganjil, misalnya $n = 2k + 1$, dapat ditulis menjadi:

$$\cos^n u = \cos^{2k+1} u = (1 - \sin^2 u)^k \cos u$$

selanjutnya ambil substitusinya:

$$t = \sin u, dt = \cos u \, du$$

sehingga integral yang melibatkan integran $\sin^m u \cos^n u$ dengan cosinusnya berpangkat ganjil dapat dihitung dengan pendekatan:

$$\begin{aligned} \int \sin^m u \cos^n u \, du &= \int \sin^m u (1 - \sin^2 u)^k \cos u \, du \\ &= \int t^m (1 - t^2)^k (dt) \end{aligned}$$

Kasus 2: untuk m dan n ganjil

Apabila m dan n ganjil sederhanakanlah integran dengan kesamaan:

$$\sin^{2k} x = (1 - \cos^2 x)^k \text{ atau } \cos^{2k} x = (1 - \sin^2 x)^k$$

Kasus 3: untuk m dan n genap

Apabila m dan n ganjil sederhanakanlah integran dengan kesamaan:

$$\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2} \text{ dan } \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

Agar lebih dapat memahami penggunaan teknik pengintegralan untuk integran $\sin^m u \cdot \cos^n u$, perhatikan beberapa contoh di bawah ini.

Contoh Soal

Perhatikan penyelesaian dari hitung integral di bawah ini:

a. $\int \sin^5 x \cos^4 x \, dx = \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + c$

b. $\int \sin^2 5x \cdot \cos^3 5x \, dx = \frac{1}{15} \sin^3 5x + \frac{1}{25} \sin^5 5x + c$

c. $\int \sin^3(2x - 1) \cdot \cos^5(2x - 1) \, dx = \frac{1}{16} \cos^8(2x - 1) - \frac{1}{12} \cos^6(2x - 1) + c$

d. $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + c$

Tentukan apakah penyelesaian dari hitung integral di atas sudah benar atau masih salah!.

- jika menurut mu sudah benar, maka nyatakan proses selesaiannya.
- jika menurut mu masih salah, nyatakan bagian mana yang salah dan nyatakan penyelesaian yang benarnya.

Penyelesaian

a. $\int \sin^5 x \cos^4 x \, dx = \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + c$

Untuk dapat menyelesaikan hitung integral tersebut, langkah awal yang harus kita lakukan dengan beberapa tahapan, diantaranya yaitu:

- Memperhatikan bentuk integran yang diberikan. Pada soal integran yang diberikan adalah $\sin^5 x \cos^4 x$

- Selanjutnya perhatikan pangkat dari integran yang diberikan. $\sin^5 x \cos^4 x$, sinus memiliki pangkat ganjil dan cosinus memiliki pangkat genap.
- Tentukan pendekatan yang dapat digunakan untuk menyelesaikan hitung integral dengan integran $\sin^5 x \cos^4 x$, untuk m nya ganjil dan n genap. Berdasarkan penjelasan di atas, dinyatakan bahwa pendekatan:

$$\begin{aligned}\int \sin^m u \cos^n u du &= \int (1 - \cos^2 u)^k \cos^n u \sin u du \\ &= \int (1 - t^2)^k t^n (-dt)\end{aligned}$$

- Untuk dapat menggunakan pendekatan tersebut, langkah awal yang dapat kita lakukan adalah dengan menyatakan bentuk sederhana dari $\sin^5 x$:

$$\sin^5 x = \sin^4 x \sin x$$

- Selanjutnya nyatakan bentuk $\sin^4 x$ ke dalam bentuk yang lebih sederhana, menjadi:

$$\begin{aligned}\sin^4 x &= \sin^2 x \sin^2 x \\ &= (\sin^2 x)^2\end{aligned}$$

- Selanjutnya kita gunakan kesamaan identitas trigonometri untuk $\sin^2 x$, dimana $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, sehingga:

$$\begin{aligned}\sin^4 x &= (\sin^2 x)^2 \\ &= (1 - \cos^2 x)^2\end{aligned}$$

- Langkah berikutnya kita substitusikan bentuk sederhana dari $\sin^4 x = (1 - \cos^2 x)^2$ ke dalam bentuk:

$$\int \sin^m u \cos^n u du = \int (1 - \cos^2 u)^k \cos^n u \sin u du$$

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x \cos^4 x \, dx &= \int \sin^4 x \cdot \sin x \cdot \cos^4 x \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cdot \sin x \cdot \cos^4 x \, dx\end{aligned}$$

- Langkah berikutnya, lakukan pemfaktoran untuk $(1 - \cos^2 x)^2$, sehingga diperoleh:

$$= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \cdot \sin x \cdot \cos^4 x \, dx$$

- Selanjutnya kita lakukan proses perkalian untuk $(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \cdot \sin x \cdot \cos^4 x$, sehingga diperoleh:

$$= \int (\cos^4 x - 2\cos^6 x + \cos^8 x) \sin x \, dx$$

- Berikutnya kita buat pemisalan untuk $\cos x$, dan menentukan turunan dari pemisalan tersebut, dimana:

$$u = \cos x ; du = -\sin x \, dx; dx = -\frac{du}{\sin x}$$

- Substitusikan pemisalan yang telah di buat, ke dalam persamaan $\int (\cos^4 x - 2\cos^6 x + \cos^8 x) \sin x \, dx$, sehingga diperoleh:

$$= \int (u^4 - 2u^6 + u^8) \sin x - \frac{du}{\sin x}$$

- Selanjutnya kita lakukan proses penyederhanaan bentuk $\int (u^4 - 2u^6 + u^8) \sin x - \frac{du}{\sin x}$, sehingga diperoleh:

$$= - \int (u^4 - 2u^6 + u^8) \, du$$

- Langkah berikutnya kita lakukan proses selesaian - $\int (u^4 - 2u^6 + u^8) \, du$, sehingga diperoleh:

$$= - [\int u^4 \, du - \int 2u^6 \, du + \int u^8 \, du]$$

$$= - \left(\frac{u^5}{5} - \frac{2u^7}{7} + \frac{u^9}{9} \right) + c$$

- Selanjutnya kita substitusikan $u = \cos x$ ke dalam $-\left(\frac{u^5}{5} - \frac{2u^7}{7} + \frac{u^9}{9}\right) + c$, sehingga diperoleh:

$$= -\left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{2\cos^7 x}{7} + \frac{\cos^9 x}{9}\right) + c$$

$$= \left(\frac{2\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^9 x}{9}\right) + c$$

Kita mendapatkan selesai:

$$\int \sin^5 x \cos^4 x \, dx = \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + c$$

Sehingga dapat kita simpulkan bahwa selesai yang dinyatakan di soal nomor 1a adalah bernilai benar.

b. $\int \sin^2 5x \cdot \cos^3 5x \, dx = \frac{1}{15} \sin^3 5x + \frac{1}{25} \sin^5 5x + c$

Untuk dapat menyelesaikan hitung integral tersebut, langkah awal yang harus kita lakukan dengan beberapa tahapan, diantaranya yaitu:

- Memperhatikan bentuk integran yang diberikan. Pada soal integran yang diberikan adalah $\sin^2 5x \cos^3 5x$
- Selanjutnya perhatikan pangkat dari integran yang diberikan. $\sin^2 5x \cos^3 5x$, sinus memiliki pangkat genap dan cosinus memiliki pangkat ganjil.
- Tentukan pendekatan yang dapat digunakan untuk menyelesaikan hitung integral dengan integran $\sin^2 5x \cos^3 5x$, untuk m nya genap dan n ganjil. Berdasarkan penjelasan di atas, dinyatakan bahwa pendekatan:

$$\begin{aligned}\int \sin^m u \cos^n u du &= \int \sin^m u (1 - \sin^2 u)^k \cos u du \\ &= \int t^m (1 - t^2)^k (dt)\end{aligned}$$

- Untuk dapat menggunakan pendekatan tersebut, langkah awal yang dapat kita lakukan adalah dengan menyatakan bentuk sederhana dari $\cos^3 5x$:

$$\cos^3 5x = \cos^2 5x \cdot \cos 5x$$

- Selanjutnya kita gunakan kesamaan identitas trigonometri untuk $\sin^2 x$, dimana $\cos^2 5x = 1 - \sin^2 5x$.
- Langkah berikutnya kita substitusikan bentuk sederhana dari $\cos^2 5x = 1 - \sin^2 5x$ ke dalam bentuk:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 5x \cdot \cos^3 5x dx &= \int \sin^2 5x \cdot \cos^2 5x \cdot \cos 5x dx \\ &= \int \sin^2 5x \cdot (1 - \sin^2 5x) \cdot \cos 5x dx\end{aligned}$$

- Selanjutnya kita lakukan proses perkalian untuk $(\sin^2 5x)(1 - \sin^2 5x)$, sehingga diperoleh:

$$= \int (\sin^2 5x - \sin^4 5x) \cdot \cos 5x dx$$

- Berikutnya kita buat pemisalan untuk $\sin 5x$, dan menentukan turunan dari pemisalan tersebut, dimana:

$$u = \sin 5x ; du = 5 \cos 5x dx ; dx = \frac{du}{5 \cos 5x}$$

- Substitusikan pemisalan yang telah di buat, ke dalam persamaan $\int (\sin^2 5x - \sin^4 5x) \cdot \cos 5x dx$, sehingga diperoleh:

$$= \int (u^2 - u^4) \cos 5x \cdot \frac{1}{5 \cos 5x} du$$

- Selanjutnya kita lakukan proses penyederhanaan bentuk $\int (u^2 - u^4) \cos 5x \cdot \frac{1}{5 \cos 5x} du$, sehingga diperoleh:

$$= \int (u^2 - u^4) \frac{1}{5} du$$

- Langkah berikutnya kita lakukan proses selesian $\int (u^2 - u^4) \frac{1}{5} du$, sehingga diperoleh:

$$= \frac{1}{5} [\int u^2 du - \int u^4 du]$$

$$= \frac{1}{5} \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right) + c$$

- Selanjutnya kita substitusikan $u = \sin 5x$ ke dalam $\frac{1}{5} \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right) + c$ sehingga diperoleh:

$$= \frac{1}{5} \left(\frac{\sin^3 5x}{3} - \frac{\sin^5 5x}{5} \right) + c$$

$$= \frac{\sin^3 5x}{15} - \frac{\sin^5 5x}{25} + c$$

Kita mendapatkan selesaian:

$$\int \sin^2 5x \cdot \cos^3 5x dx = \frac{1}{15} \sin^3 5x - \frac{1}{25} \sin^5 5x + c$$

Hal ini berbeda dengan selesaian yang telah dinyatakan di soal, dimana:

$$\int \sin^2 5x \cdot \cos^3 5x dx = \frac{1}{15} \sin^3 5x + \frac{1}{25} \sin^5 5x + c$$

Sehingga dapat kita simpulkan bahwa selesaian yang dinyatakan di soal nomor 1b bernilai salah.

$$\begin{aligned} \text{c. } \int \sin^3(2x - 1) \cdot \cos^5(2x - 1) dx &= \frac{1}{16} \cos^8(2x - 1) - \\ &\frac{1}{12} \cos^6(2x - 1) + c \end{aligned}$$

Untuk dapat menyelesaikan hitung integral tersebut, langkah awal yang harus kita lakukan dengan beberapa tahapan, diantaranya yaitu:

- Memperhatikan bentuk integran yang diberikan. Pada soal integran yang diberikan adalah $\sin^3(2x - 1) \cdot \cos^5(2x - 1)$
- Selanjutnya perhatikan pangkat dari integran yang diberikan. $\sin^3(2x - 1) \cdot \cos^5(2x - 1)$, sinus memiliki pangkat ganjil dan cosinus memiliki pangkat ganjil.
- Tentukan pendekatan yang dapat digunakan untuk menyelesaikan hitung integral dengan integran $\sin^3(2x - 1) \cdot \cos^5(2x - 1)$, untuk m nya ganjil dan n ganjil. Berdasarkan penjelasan di atas, dinyatakan bahwa pendekatan:

$$\sin^{2k} x = (1 - \cos^2 x)^k \text{ atau } \cos^{2k} x = (1 - \sin^2 x)^k$$

- Untuk dapat menggunakan pendekatan tersebut, langkah awal yang dapat kita lakukan adalah dengan menyatakan bentuk sederhana dari $\sin^3(2x - 1) \cdot \cos^5(2x - 1)$

$$\sin^3(2x - 1) = \sin^2(2x - 1) \cdot \sin(2x - 1)$$

- Selanjutnya kita gunakan kesamaan identitas trigonometri untuk $\sin^2(2x - 1)$, dimana $\sin^2(2x - 1) = 1 - \cos^2(2x - 1)$.
- Langkah berikutnya kita substitusikan bentuk sederhana dari $\sin^2(2x - 1) = 1 - \cos^2(2x - 1)$ ke dalam bentuk: $\int \sin^3(2x - 1) \cdot \cos^5(2x - 1) dx$, sehingga diperoleh:

$$= \int \sin^2(2x - 1) \cdot \sin(2x - 1) \cdot \cos^5(2x - 1) dx$$

$$= \int (1 - \cos^2(2x - 1)) \cdot \sin(2x - 1) \cdot \cos^5(2x - 1) dx$$

- Selanjutnya kita lakukan proses perkalian untuk $(1 - \cos^2(2x - 1)) \cdot \sin(2x - 1) \cdot \cos^5(2x - 1)$, sehingga diperoleh:

$$= \int (\cos^5(2x - 1) - \cos^7(2x - 1)) \cdot \sin(2x - 1) dx$$

- Berikutnya kita buat pemisalan untuk $\cos(2x-1)$, dan menentukan turunan dari pemisalan tersebut, dimana:

$$u = \cos(2x-1); du = -2 \sin(2x-1) dx; dx = \frac{du}{-2 \sin(2x-1)}$$

- Substitusikan pemisalan yang telah di buat, ke dalam persamaan $\int (\cos^5(2x - 1) - \cos^7(2x - 1)) \cdot \sin(2x - 1) dx$, sehingga diperoleh:

$$= \int (u^5 - u^7) \sin(2x - 1) \cdot \frac{du}{-2 \sin(2x-1)}$$

- Selanjutnya kita lakukan proses penyederhanaan bentuk $\int (u^5 - u^7) \sin(2x - 1) \cdot \frac{du}{-2 \sin(2x-1)}$, sehingga diperoleh:

$$= \int (u^5 - u^7) \frac{1}{-2} du$$

- Langkah berikutnya kita lakukan proses selesian $\int (u^5 - u^7) \frac{1}{-2} du$, sehingga diperoleh:

$$= \frac{1}{-2} [\int u^5 du - \int u^7 du]$$

$$= \frac{1}{-2} \left(\frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8} \right) + c$$

- Selanjutnya kita substitusikan $u = \cos(2x-1)$ ke dalam $\frac{1}{-2} \left(\frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8} \right) + c$, sehingga diperoleh:

$$= \frac{1}{-2} \left(\frac{\cos^6(2x-1)}{6} - \frac{\cos^8(2x-1)}{8} \right) + c$$

$$= \frac{\cos^8(2x-1)}{16} - \frac{\cos^6(2x-1)}{12} + c$$

Kita mendapatkan selesaian:

$$\begin{aligned} \int \sin^3(2x-1) \cdot \cos^5(2x-1) dx \\ = \frac{1}{16} \cos^8(2x-1) - \frac{1}{12} \cos^6(2x-1) + c \end{aligned}$$

Hal ini sama dengan selesaian yang telah dinyatakan di soal, dimana:

$$\begin{aligned} \int \sin^3(2x-1) \cdot \cos^5(2x-1) dx \\ = \frac{1}{16} \cos^8(2x-1) - \frac{1}{12} \cos^6(2x-1) + c \end{aligned}$$

Sehingga dapat kita simpulkan bahwa selesaian yang dinyatakan di soal nomor 1c bernilai benar.

d. $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c$

Untuk dapat menyelesaikan hitung integral tersebut, langkah awal yang harus kita lakukan dengan beberapa tahapan, diantaranya yaitu:

- Memperhatikan bentuk integran yang diberikan. Pada soal integran yang diberikan adalah $\sin^2 x \cdot \cos^2 x$
- Selanjutnya perhatikan pangkat dari integran yang diberikan. $\sin^2 x \cdot \cos^2 x$, sinus memiliki pangkat genap dan cosinus memiliki pangkat genap.
- Tentukan pendekatan yang dapat digunakan untuk menyelesaikan hitung integral dengan integran $\sin^2 x \cdot \cos^2 x$, untuk m nya genap dan n genap. Berdasarkan penjelasan di

atas, dinyatakan bahwa pendekatan yang dapat digunakan adalah:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \text{ dan } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

- Langkah berikutnya kita substitusikan bentuk sederhana dari $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ dan $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ ke dalam bentuk:

$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx$, sehingga diperoleh:

$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx$$

- Selanjutnya kita lakukan proses perkalian untuk $\left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)$, sehingga diperoleh:

$$= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos^2 2x \right) dx$$

- Langkah berikutnya kita lakukan proses selesaian $\int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos^2 2x \right) dx$, sehingga diperoleh:

$$= \int \frac{1}{4} dx - \int \frac{1}{4} \cos^2 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx$$

- Selanjutnya sederhanakan bentuk $\cos^2 2x$, sehingga diperoleh:

$$\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$$

- Langkah berikutnya kita substitusikan $\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$ ke dalam $\frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx$, sehingga kita peroleh:

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx$$

- Selanjutnya lakukan selesaian hitung integral $\frac{1}{4}x -$

$$\frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx, \text{ sehingga diperoleh:}$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \left[\int \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} \int \cos 4x dx \right]$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x \right]$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \sin 4x$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \sin 4x$$

Karena selesaian yang kita peroleh adalah:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \sin 4x + c$$

Hal ini sama dengan selesaian yang telah dinyatakan di soal, dimana:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \sin 4x + c$$

Sehingga dapat kita simpulkan bahwa selesaian yang dinyatakan di soal nomor 1d bernilai benar.

3.3.3 Integral Trigonometri Jenis $\int \tan^n x \cdot u du$ dan $\int \cot^n x \cdot u du$

Bentuk $\int \tan^n x \cdot u du$ dan $\int \cot^n x \cdot u du$ merupakan salah satu bentuk fungsi trigonometri, yang banyak menjadi kendala apabila dijadikan integralkan dalam hitung integral. Oleh sebab itu, hitung integral yang melibatkan integralkan $\int \tan^n x \cdot u du$ dan $\int \cot^n x \cdot u du$

harus dapat disajikan secara sistematis dan sejelas mungkin. Pada bagian awal, sudah dinyatakan bahwa:

$$\tan^2 u \, du = \sec^2 u - 1$$

$$\cot^2 u \, du = \operatorname{cosec}^2 u - 1$$

Untuk dapat menyelesaikan hitung integral yang melibatkan integran $\int \tan^n x \cdot u \, du$ dan $\int \cot^n u \, du$ kita dapat menggunakan kesamaan fungsi trigonometri tersebut.

Berikut akan disajikan contoh penggunaan kesamaan fungsi trigonometri tersebut dalam penyelesaian hitung integral yang melibatkan integran $\int \tan^n x \cdot u \, du$ dan $\int \cot^n u \, du$

Contoh Soal

Identifikasilah cara yang dapat digunakan untuk menyelesaikan hitung integral di bawah ini dan kemudian tentukan selesaiannya!

- a. $\int \tan^3 x \, dx$
- b. $\int \operatorname{cosec}^3 5x \, dx$

Penyelesaian

- a. $\int \tan^3 x \, dx$

Untuk dapat menyelesaikan hitung integral tersebut, kita harus mengidentifikasi:

- Nyatakan Integran $\tan^3 x$ ke dalam bentuk yang lebih sederhana yang mengarahkan ke kesamaan fungsi trigonometri yang telah kita pelajari.

Respon

Integran $\tan^3 x$ dapat disederhanakan menjadi:

$$\tan^3 x = \tan x \cdot \tan^2 x$$

- Selanjutnya, ubahlah bentuk $\tan^2 x$ dengan menggunakan bentuk kesamaan fungsi trigonometri $\tan^2 u \, du = \sec^2 u - 1$

Respon

$$\tan^3 x = \tan x \cdot (\sec^2 x - 1)$$

- Sederhanakan kesamaan yang disebelah kanan dengan cara mengalikan $\tan x$ dengan $(\sec^2 x - 1)$

Respon

$$\tan^3 x = \tan x \cdot \sec^2 x - \tan x$$

- Setelah kita menyederhanakan bentuk integrannya, barulah kita dapat menyelesaikan hitung integralnya dengan mudah.

Respon

$$\begin{aligned} \int \tan^3 x \, dx &= \int (\tan x \cdot \sec^2 x - \tan x) \, dx \\ &= \int \tan x \sec^2 x \, dx - \int \tan x \, dx \end{aligned}$$

Ingat di bagian awal sudah kita nyatakan bahwa:

$$\int \tan x \, dx = \ln|\sec x| + c$$

Sedangkan untuk integran $\int \tan x \sec^2 x \, dx$, tidak ditemukan ke samaannya dalam bentuk rumus dasar integral. Oleh sebab itu, untuk dapat menyelesaikannya dapat kita gunakan teknik integrasi substitusi.

Respon

Misalkan: $u = \tan x$

$$du = \sec^2 x \, dx$$

substitusikan pemisalan yang telah kita buat, ke dalam bentuk $\int \tan x \sec^2 x \, dx$, dan kemudian selesaikan hitung integralnya.

Respon

$$\begin{aligned}\int \tan x \sec^2 x \, dx &= \int u \, du \\ &= \frac{1}{2} u + c \\ &= \frac{1}{2} \tan x + c\end{aligned}$$

Gabungkan selesaian yang kita dapatkan, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x \, dx &= \int (\tan x \cdot \sec^2 x - \tan x) \, dx \\ &= \int \tan x \sec^2 x \, dx - \int \tan x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \tan x - \ln|\sec x| + c\end{aligned}$$

b. $\int \operatorname{cosec}^3 5x \, dx$

Untuk dapat menyelesaikan hitung integral tersebut, kita harus mengidentifikasi:

- Nyatakan Integran $\operatorname{cosec}^3 5x$ ke dalam bentuk yang lebih sederhana yang mengarahkan ke kesamaan fungsi trigonometri yang telah kita pelajari.

Respon

Integran $\operatorname{cosec}^3 5x$ dapat disederhanakan menjadi:

$$\operatorname{cosec}^3 5x = \operatorname{cosec} 5x \cdot \operatorname{cosec}^2 5x$$

- Selanjutnya, ubahlah bentuk $\operatorname{cosec}^2 5x$ dengan menggunakan bentuk kesamaan fungsi trigonometri

$$\cot^2 u = \operatorname{cosec}^2 u - 1$$

$$\cot^2 u + 1 = \operatorname{cosec}^2 u$$

$$\cot^2 5u + 1 = \operatorname{cosec}^2 5u$$

Respon

$$\operatorname{cosec}^3 5x = \operatorname{cosec} 5x \cdot (\cot^2 5x + 1)$$

- Sederhanakan kesamaan yang disebelah kanan dengan cara mengalikan $\operatorname{cosec} 5x$ dengan $(\cot^2 5x + 1)$

Respon

$$\operatorname{cosec}^3 5x = \operatorname{cosec} 5x \cdot \cot^2 5x + \operatorname{cosec} 5x$$

- Setelah kita menyederhanakan bentuk integrannya, barulah kita dapat menyelesaikan hitung integralnya dengan mudah.

Respon

$$\begin{aligned} \int \operatorname{cosec}^3 5x \, dx &= \int (\operatorname{cosec} 5x \cdot \cot^2 5x + \operatorname{cosec} 5x) \, dx \\ &= \int \cot 5x \operatorname{cosec}^2 5x \, dx + \int \operatorname{cosec} 5x \, dx \end{aligned}$$

Ingat di bagian awal sudah kita nyatakan bahwa:

$$\int \operatorname{cosec} x \, dx = -\cot x + c$$

Sedangkan, dibagian kanan yang kita miliki adalah: $\int \operatorname{cosec} 5x \, dx$. Untuk dapat menghitung integralnya, kita gunakan teknik substitusi.

Respon

Misalkan: $u = 5x$

$$du = 5 \, dx$$

$$\frac{1}{5} du = dx$$

substitusikan pemisalan yang kita buat ke dalam bentuk $\int \operatorname{cosec} 5x \, dx$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{cosec} 5x \, dx &= \int \operatorname{cosec} u \, \frac{1}{5} du \\ &= \frac{1}{5} \int \operatorname{cosec} u \, du \\ &= -\frac{1}{5} \cot u + c \\ &= -\frac{1}{5} \cot 5x + c \end{aligned}$$

Sedangkan untuk integran $\int \operatorname{cosec} 5x \cot^2 5x \, dx$, tidak ditemukan ke samaannya dalam bentuk rumus dasar integral. Oleh sebab itu, untuk dapat menyelesaikannya dapat kita gunakan teknik integrasi substitusi.

Respon

Misalkan: $u = 5x$

$$du = 5 \, dx$$

$$dx = \frac{du}{5}$$

substitusikan pemisalan yang telah kita buat, ke dalam bentuk $\int \tan x \sec^2 x \, dx$, dan kemudian selesaikan hitung integralnya.

Respon

$$\begin{aligned} \int \operatorname{cosec} 5x \cot^2 5x \, dx &= \int \operatorname{cosec} u \cot^2 u \, \frac{du}{5} \\ &= \frac{1}{5} \int \operatorname{cosec} u \cdot \cot^2 u \, du \end{aligned}$$

Selanjutnya sederhanakan bentuk $\operatorname{cosec} u$ dan $\cot^2 u$ dengan kesamaan:

$$\operatorname{cosec} u = \frac{1}{\cos u} ; \cot^2 u = \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}$$

Substitusikan kesamaan yang diperoleh ke dalam bentuk $\frac{1}{5} \int \operatorname{cosec} u \cdot \cot^2 u \, du$, diperoleh:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{5} \int \frac{1}{\cos u} \cdot \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u} \cdot du \\ &= \frac{1}{5} \int \frac{\cos u}{\sin^2 u} du \end{aligned}$$

Gunakan metode substitusi untuk menyelesaikan hitung integral tersebut.

Respon

Misalkan: $p = \sin u$

$$dp = \cos u \, du$$

substitusikan permisalan yang kita buat ke dalam $\frac{1}{5} \int \frac{\cos u}{\sin^2 u} \, du$, sehingga diperoleh:

Respon

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{5} \int \frac{dp}{p^2} \\ &= -\frac{1}{5 \sin 5x} + c \end{aligned}$$

- Gabungkan selesaian yang kita peroleh

Respon

$$\int \operatorname{cosec}^3 5x \, dx = -\frac{1}{5} \cot 5x - \frac{1}{5 \sin 5x} + c$$

3.3.4 Integral Trigonometri Bentuk $\int \sin mx \cdot \cos nx \, dx$, $\int \sin mx \cdot \sin nx \, dx$, dan $\int \cos mx \cdot \cos nx \, dx$

Untuk dapat menyelesaikan hitung integral yang menggunakan integran $\int \sin mx \cdot \cos nx \, dx$, $\int \sin mx \cdot \sin nx \, dx$, dan $\int \cos mx \cdot \cos nx \, dx$ adalah dengan menggunakan rumus – rumus fungsi – fungsi trigonometri berikut ini:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m-n)x + \sin(m+n)x]$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$$

Untuk lebih memahami penggunaan rumus – rumus fungsi trigonometri tersebut, perhatikan contoh – contoh berikut ini.

Contoh Soal

Perhatikan pernyataan di bawah ini

a. $\int \sin 3x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x + c$

b. $\int \sin 5x \cdot \sin 2x \, dx = \frac{1}{8} \sin 3x - \frac{1}{12} \sin 7x + c$

c. $\int \cos 6x \cdot \cos 3x \, dx = \frac{1}{8} \sin 3x + \frac{1}{16} \sin 8x + c$

Tentukan apakah pernyataan di atas bernilai benar atau salah.

- Jika menurut mu benar, nyatakan proses penyelesaiannya!
- Jika masih salah, tentukan bagian mana yang salah dan nyatakan jawaban yang benarnya!

Penyelesaian

Untuk dapat menyelesaikan hitung integral tersebut, kita tidak dapat langsung menentukan benar atau salah pernyataan tersebut. Kita langsung menunjukkan proses penyelesaiannya, kemudian baru kita dapat menentukan kebenaran pernyataan tersebut.

a. $\int \sin 3x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x + c$

Untuk dapat menyelesaikan hitung integral tersebut, ada beberapa langkah dapat kita lakukan, yaitu:

- Tentukan terlebih dahulu integran yang digunakan dalam hitung integral tersebut, identic dengan rumus fungsi trigonometri yang mana.

Respon

Di soal, kita lihat bahwa integran $\sin 3x \cos 2x$ identic dengan kesamaan fungsi trigonometri

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m-n)x + \sin(m+n)x]$$

- Selesaikan hitung integral tersebut dengan menggunakan kesamaan fungsi trigonometri tersebut

Respon

$$\begin{aligned} \int \sin 3x \cos 2x \, dx &= \int \left[\frac{1}{2} (\sin(3-2)x + \sin(3+2)x) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int (\sin x + \sin 5x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} [\int \sin x \, dx + \int \sin 5x \, dx] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\cos x + -\frac{1}{5} \cos 5x \right] + c$$

$$= -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x + c$$

Pernyataan yang diberikan adalah:

$$\int \sin 3x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x + c$$

Sedangkan selesaian yang diperoleh adalah:

$$\int \sin 3x \cos 2x \, dx = -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x + c$$

Sehingga dapat kita simpulkan bahwa pernyataan untuk poin a adalah bernilai salah, kesalahan terletak pada

$$\int \sin 3x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x + c, \quad \text{kesalahan}$$

pada integral $\sin x$.

b. $\int \sin 5x \cdot \sin 2x \, dx = \frac{1}{8} \sin 3x - \frac{1}{12} \sin 7x + c$

Untuk dapat menyelesaikan hitung integral tersebut, ada beberapa langkah dapat kita lakukan, yaitu:

- Tentukan terlebih dahulu integran yang digunakan dalam hitung integral tersebut, identic dengan rumus fungsi trigonometri yang mana.

Respon

Di soal, kita lihat bahwa integran $\sin 5x \sin 2x$ identic dengan kesamaan fungsi trigonometri

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

- Selesaikan hitung integral tersebut dengan menggunakan kesamaan fungsi trigonometri tersebut

Respon

$$\begin{aligned}
 \int \sin 5x \sin 2x \, dx &= \int \left[\frac{1}{2} (\cos(5-2)x - \cos(5+2)x) \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int (\cos 3x - \cos 7x) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[\int \cos 3x \, dx - \int \cos 7x \, dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{7} \sin 7x \right] + c \\
 &= \frac{1}{6} \sin 3x - \frac{1}{14} \sin 7x + c
 \end{aligned}$$

Pernyataan yang diberikan adalah:

$$\int \sin 5x \cdot \sin 2x \, dx = \frac{1}{8} \sin 3x - \frac{1}{12} \sin 7x + c$$

Sedangkan selesaian yang diperoleh adalah:

$$\int \sin 5x \sin 2x \, dx = \frac{1}{6} \sin 3x - \frac{1}{14} \sin 7x + c$$

Sehingga dapat kita simpulkan bahwa pernyataan untuk poin b adalah bernilai salah, kesalahan terletak pada

$$\int \sin 5x \cdot \sin 2x \, dx = \frac{1}{8} \sin 3x - \frac{1}{12} \sin 7x + c$$

c. $\int \cos 6x \cdot \cos 3x \, dx = \frac{1}{8} \sin 3x + \frac{1}{16} \sin 8x + c$

Untuk dapat menyelesaikan hitung integral tersebut, ada beberapa langkah dapat kita lakukan, yaitu:

- Tentukan terlebih dahulu integran yang digunakan dalam hitung integral tersebut, identic dengan rumus fungsi trigonometri yang mana.

Respon

Di soal, kita lihat bahwa integran $\cos 6x \cos 3x$ identik dengan kesamaan fungsi trigonometri

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$$

- Selesaikan hitung integral tersebut dengan menggunakan kesamaan fungsi trigonometri tersebut

Respon

$$\begin{aligned} \int \cos 6x \cos 3x \, dx &= \int \left[\frac{1}{2} (\cos(6-3)x + \cos(6+3)x) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int (\cos 3x + \cos 9x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} [\int \cos 3x \, dx + \int \cos 9x \, dx] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{9} \sin 9x \right] + c \\ &= \frac{1}{6} \sin 3x + \frac{1}{18} \sin 9x + c \end{aligned}$$

Pernyataan yang diberikan adalah:

$$\int \cos 6x \cdot \cos 3x \, dx = \frac{1}{8} \sin 3x + \frac{1}{16} \sin 8x + x$$

Sedangkan selesaian yang diperoleh adalah:

$$\int \cos 6x \cos 2x \, dx = \frac{1}{6} \sin 3x + \frac{1}{18} \sin 9x + c$$

Sehingga dapat kita simpulkan bahwa pernyataan untuk poin c adalah bernilai salah, kesalahan terletak pada

$$\int \cos 6x \cdot \cos 3x \, dx = \frac{1}{8} \sin 3x + \frac{1}{16} \sin 8x + c$$

RANGKUMAN

1. Integral Trigonometri dalam Bentuk

$$\int \sin^n u \, du \text{ atau } \int \cos^n u \, du$$

Kasus 1: untuk n ganjil

Apabila n ganjil, sederhanakanlah integran dengan menggunakan kesamaan:

$$\sin^2 u + \cos^2 u = 1.$$

Untuk n ganjil, kita buat pemisalkan $n = 2k + 1$, sehingga untuk $\sin^n u$ dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}\sin^n u &= \sin^{2k+1} u \\ &= (\sin^2 u)^k \cdot \sin u \\ &= (1 - \cos^2 u)^k \sin u\end{aligned}$$

Kita misalkan lagi:

$$t = \cos u, \, dt = -\sin u \, du$$

sehingga integral dengan integran $\sin^n u$ di atas dapat dihitung dengan pendekatan:

$$\begin{aligned}\int \sin^n u \, du &= \int (1 - \cos^2 u)^k \sin u \, du \\ &= \int (1 - t^2)^k (-dt)\end{aligned}$$

Sedangkan untuk integral dengan integran $\cos^n u$ dapat kita lakukan dengan membuat persamaan:

$$\begin{aligned}\cos^n u &= \cos^{2k+1} u \\ &= (1 - \sin^2 u)^k \cos u\end{aligned}$$

Selanjutnya kita buat pemisalan:

$$t = \sin u, \, dt = \cos u \, du$$

Sehingga integral dengan integran $\cos^n u$ dapat dihitung dengan pendekatan:

$$\begin{aligned}\int \cos^n u \, du &= \int (1 - \sin^2 u)^k \cos u \, du \\ &= \int (1 - t^2)^k (dt)\end{aligned}$$

Kasus 2: untuk n genap

Apabila n genap sederhanakanlah integran dengan menggunakan kesamaan $\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$ dan $\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$

Untuk n genap, kita buat pemisalkan $n = 2k$, sehingga untuk $\sin^n u$ dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}\sin^n u &= \sin^{2k} u \\ &= \frac{1 - \cos 2u}{2}\end{aligned}$$

sehingga integral dengan integran $\sin^n u$ di atas dapat dihitung dengan pendekatan:

$$\begin{aligned}\int \sin^n u \, du &= \int \sin^{2k} u \, du \\ &= \int \frac{1 - \cos 2u}{2} \, du \\ &= \int \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos 2u}{2} \right] du \\ &= \frac{1}{2} \int du - \frac{1}{2} \int \cos 2u \, du\end{aligned}$$

Selanjutnya untuk integran $\cos^n u$, n genap, dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}\cos^n u &= \cos^{2k} u \\ &= \frac{1 + \cos 2u}{2}\end{aligned}$$

sehingga integral dengan integran $\cos^n u$ di atas dapat dihitung dengan pendekatan:

$$\begin{aligned}\int \cos^n u \, du &= \int \cos^{2k} u \, du \\ &= \int \frac{1+\cos 2u}{2} \, du \\ &= \int \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos 2u}{2} \right] du \\ &= \frac{1}{2} \int du + \frac{1}{2} \int \cos 2u \, du\end{aligned}$$

2. Integral Jenis $\int \sin^m u \cos^n u \, du$

Kasus 1: untuk m atau n ganjil

Apabila salah satu dari m atau n ganjil sederhanakanlah integran dengan kesamaan $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$. Bilamana m ganjil, misalnya $m = 2k + 1$ dan n sembarang, tulislah fungsi sinus yang pangkat ganjil menjadi:

$$\sin^m u = \sin^{2k+1} u = (1 - \cos^2 u)^k \sin u$$

selanjutnya ambil substitusi:

$$t = \cos u, \, dt = -\sin u \, du \text{ atau } \sin u \, du = -dt$$

sehingga integral yang melibatkan integran $\sin^m u \cos^n u$ dengan sinusnya berpangkat ganjil dapat dihitung dengan pendekatan:

$$\begin{aligned}\int \sin^m u \cos^n u \, du &= \int (1 - \cos^2 u)^k \cos^n u \sin u \, du \\ &= \int (1 - t^2)^k t^n (-dt)\end{aligned}$$

Sedangkan untuk cosinus yang berpangkat ganjil, misalnya $n = 2k + 1$, dapat ditulis menjadi:

$$\cos^n u = \cos^{2k+1} u = (1 - \sin^2 u)^k \cos u$$

selanjutnya ambil substitusinya:

$$t = \sin u, dt = \cos u du$$

sehingga integral yang melibatkan integran $\sin^m u \cos^n u$ dengan cosinusnya berpangkat ganjil dapat dihitung dengan pendekatan:

$$\begin{aligned}\int \sin^m u \cos^n u du &= \int \sin^m u (1 - \sin^2 u)^k \cos u du \\ &= \int t^m (1 - t^2)^k (dt)\end{aligned}$$

Kasus 2: untuk m dan n ganjil

Apabila m dan n ganjil sederhanakanlah integran dengan kesamaan:

$$\sin^{2k} x = (1 - \cos^2 x)^k \text{ atau } \cos^{2k} x = (1 - \sin^2 x)^k$$

Kasus 3: untuk m dan n genap

Apabila m dan n ganjil sederhanakanlah integran dengan kesamaan:

$$\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2} \text{ dan } \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

3. Integral Trigonometri Jenis $\int \tan^n u du$ dan $\int \cot^n u du$

Untuk menghitung integral yang melibatkan integran $\int \tan^n u du$ dan $\int \cot^n u du$ dapat menggunakan rumus fungsi trigonometri berikut ini:

$$\tan^2 u du = \sec^2 u - 1$$

$$\cot^2 u du = \operatorname{cosec}^2 u - 1$$

4. Integral Trigonometri Jenis $\int \sin mx \cdot \cos nx dx$, $\int \sin mx \cdot \sin nx dx$, dan $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$

Untuk dapat menyelesaikan hitung integral yang menggunakan integran $\int \sin mx \cdot \cos nx \, dx$, $\int \sin mx \cdot \sin nx \, dx$, dan $\int \cos mx \cdot \cos nx \, dx$ adalah dengan menggunakan rumus – rumus fungsi – fungsi trigonometri berikut ini:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m - n)x + \sin(m + n)x]$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m - n)x - \cos(m + n)x]$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m - n)x + \cos(m + n)x]$$

LATIHAN

1. Dinyatakan bahwa selesaian dari hitung integral di bawah ini adalah:

a. $\int \sin^5 x \cdot \cos^4 x \, dx = \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + c$

b. $\int \sin^5(3x + 1) \cdot \cos^3(3x + 1) dx = \frac{1}{16} \cos^8(3x + 1) - \frac{1}{12} \cos^6(2x + 1) + c$

Tentukan:

- Aturan integral apa yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan hitung integral di atas? Kemukakan alasan mu!
 - Gunakan aturan integral yang kamu nyatakan pada point a di atas untuk menyelesaikan permasalahan hitung integral di atas!
 - Apakah selesaian yang kamu temukan sama dengan selesaian yang dinyatakan di atas?
 - Jika ya, nyatakan selesaiannya.
 - Jika tidak, nyatakan perbedaannya dengan disertai alasannya!
2. Tentukan apakah $\int \tan^{-\frac{3}{2}} x \sec^6 x dx$ dapat diselesaikan dengan menggunakan aturan integral dari $\int \tan^n u \, du$ dan $\int \cot^n u \, du$! Kemukakan alasanmu dan kemudian tentukan selesiannya!
3. Dinyatakan bahwa $\int \cot^5 x \operatorname{cosec}^{-\frac{3}{2}} x \, dx = -\frac{2}{5} \operatorname{cosec}^{\frac{5}{2}} x + 4 \operatorname{cosec}^{\frac{1}{2}} x + \frac{2}{3} \operatorname{cosec}^{-\frac{3}{2}} x + c$. Tentukan apakah pernyataan tersebut bernilai benar?

- Jika ya, tentukan proses penyelesaian untuk menunjukkan pernyataan tersebut benar!
- Jika tidak, nyatakan alasan mengapa belum benar dan nyatakan pernyataan yang benarnya menurut mu!

4. Perhatikan selesaiian permasalahan hitung integral di bawah ini:

$$\begin{aligned}
 \int \sin 7x \cdot \cos 5x \, dx &= \int \frac{1}{2} [\sin(7-5)x - \cos(7+5)x] \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int (\sin 2x) - (\cos 12x) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{12} \sin 12x \right] + c \\
 &= -\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{24} \sin 12x + c
 \end{aligned}$$

Tentukan:

- Aturan integral apakah yang digunakan dalam penyelesaian hitung integral di atas? Kemukakan alasanmu!
- Apakah aturan integral yang digunakan sudah benar?

Jika ya, nyatakan alasan mu!

Jika tidak, nyatakan alasamu, dan tuliskah aturan integral yang benarnya dan nyatakan selesaiian yang benarnya!

- Apakah ada cara lain atau aturan lain yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan hitung integral di atas? jika ada nyatakan selesaiian permasalahan hitung integral di atas dengan cara tersebut dan nyatakan cara mana yang lebih efektif dengan menyertakan alasan mu!

5. Tentukan selesaiian dari hitung integral di bawah ini:

a. $\int \operatorname{cosec}^6 x \, dx$

b. $\int \tan^5 x \sec^{-\frac{3}{4}} x \, dx$

c. $\int \sin^2 x \cos^{-\frac{3}{2}} x \, dx$

d. $\int \sec^5 x \, dx$

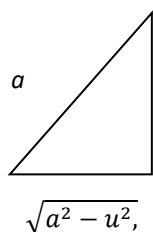
e. $\int \cot^{-3} \operatorname{cosec}^6 x \, dx$

3.4 Teknik Integrasi Dengan Substitusi Trigonometri

Integran dengan bentuk akar sering kita jumpai dalam permasalahan integral, yang mana akan menimbulkan kesulitan untuk menyelesaikan integralnya. Bentuk akar yang sering kita jumpai adalah integran yang memuat bentuk-bentuk $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$ atau $\sqrt{u^2 - a^2}$ dengan $a > 0$. Untuk dapat menyelesaikan permasalahan integral yang fungsinya berbentuk akar, maka diperlukan suatu teknik integrasi yaitu dengan substitusi fungsi trigonometri yang bertujuan untuk meniadakan bentuk akar tersebut. Konsep kerja teknik integrasi dengan substitusi fungsi trigonometri adalah meniadakan bentuk akar dari fungsi yang terdapat dalam persoalan integral yang diberikan, setelah itu peubah dari fungsi diganti dengan fungsi trigonometri yang sesuai. Setelah itu barulah bentuk integral fungsi trigonometri dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep integral trigonometri.

3.4.1 Integran Memuat Bentuk $\sqrt{a^2 - u^2}$, dengan $a > 0$

Apabila integran memuat bentuk $\sqrt{a^2 - u^2}$, andaikan bahwa $u = a \sin(t)$, dengan $a > 0$. Kondisi ini dapat dinyatakan pada suatu segitiga siku-siku seperti berikut:



$$\begin{aligned}
 \sin t &= \frac{u}{a}; u = a \sin t \\
 du &= a \cos t \, dt \\
 \sqrt{a^2 - u^2} &= \sqrt{a^2 - (a \sin t)^2} \\
 &= \sqrt{a^2 - (a^2 \sin^2 t)} \\
 &= \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} \\
 &= \sqrt{a^2 \cos^2 t} = a \cos t; t = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right)
 \end{aligned}$$

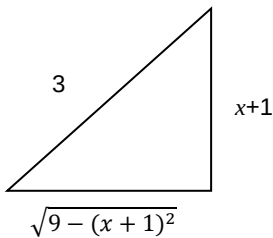
Contoh Soal

Tentukan selesaian dari $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}$

Penyelesaian

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-\{x^2+2x-8\}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\{(x+1)^2-9\}}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+1)^2}}$$



$$\sin u = \frac{x+1}{3}$$

$$3 \sin u = x+1$$

$$3 \sin u - 1 = x$$

$$3 \cos u \, du = dx$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+1)^2}}$$

$$= \int \frac{3 \cos u \, du}{\sqrt{9 - (3 \sin u - 1 + 1)^2}}$$

$$= \int \frac{3 \cos u \, du}{\sqrt{9 - (9 \sin^2 u)}}$$

$$= \int \frac{3 \cos u \, du}{\sqrt{9(1 - \sin^2 u)}}$$

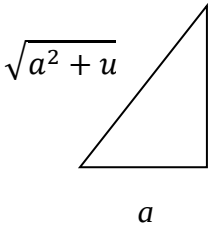
$$= \int \frac{3 \cos u \, du}{\sqrt{9 \cos^2 u}}$$

$$= \int \frac{3 \cos u}{3 \cos u} \, du$$

$$= \int du = u + c \rightarrow \left(\arcsin \frac{x+1}{3} \right) + c$$

3.4.2 Integral Memuat Bentuk $\sqrt{a^2 + u^2}$, dengan $a > 0$

Apabila integral memuat bentuk $\sqrt{a^2 + u^2}$, rasionalkan bentuk akar dengan mensubstitusikan $u = a \tan t$. Kondisi ini dapat dinyatakan pada suatu segitiga siku-siku seperti berikut:



$$\tan t = \frac{u}{a}; u = a \tan t; du = a \sec^2 t \, dt$$

$$u \quad \sqrt{a^2 + u^2} = \sqrt{a^2 + (a \tan t)^2} = \sqrt{a^2 + (a^2 \tan^2 t)}$$

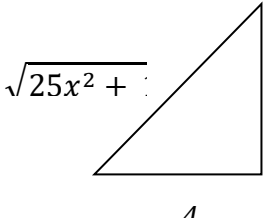
$$= \sqrt{a^2(1 + \tan^2 t)} = \sqrt{a^2 \sec^2 t}$$

$$= a \sec t$$

Contoh Soal

Tentukan selesaian dari $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{25x^2 + 16}}$

Penyelesaian



$$\tan u = \frac{5x}{4}; 5x = 4 \tan u; x = \frac{4}{5} \tan u$$

$$dx = \frac{4}{5} \sec^2 u \, du$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{25x^2 + 16}} &= \int \frac{\frac{4}{5} \sec^2 u \, du}{\left(\frac{4}{5}\right)^2 \tan^2 u \sqrt{25 \left(\frac{4}{5} \tan u\right)^2 + 16}} \\ &= \int \frac{\frac{4}{5} \sec^2 u \, du}{\left(\frac{16}{25}\right) \tan^2 u \sqrt{25 \left(\frac{16}{25}\right) \tan^2 u + 16}} \end{aligned}$$

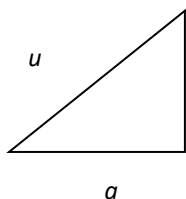
$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{\frac{4}{5} \sec^2 u \, du}{\left(\frac{16}{25}\right) \tan^2 u \sqrt{16 \tan^2 u + 16}} \\
 &= \int \frac{\frac{4}{5} \sec^2 u \, du}{\left(\frac{16}{25}\right) \tan^2 u \sqrt{16(1 + \tan^2 u)}} \\
 &= \int \frac{\frac{4}{5} \sec^2 u \, du}{\left(\frac{16}{25}\right) \tan^2 u \sqrt{16 \sec^2 u}} \\
 &= \int \frac{\frac{4}{5} \sec^2 u \, du}{\left(\frac{16}{25}\right) \tan^2 u \, 4 \sec u} \\
 &= \int \frac{\frac{4}{5} \frac{1}{\cos^2 u} du}{\left(\frac{16}{25}\right) \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} \, 4 \frac{1}{\cos u}} \\
 &= \int \frac{\frac{4}{5} \cos u \, du}{\left(\frac{4}{5}\right)^2 \sin^2 u \cdot 4} \\
 &= \int \frac{\cos u \, du}{\frac{4}{5} \sin^2 u \cdot 4} = \int \frac{5 \cos u \, du}{16 \sin^2 u} = \frac{5}{16} \int \frac{\cos u}{\sin^2 u} du \\
 &= \frac{5}{16} \int \cos u \sin^{-2} u \, du \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{Misal: } x = \sin u \\ dx = \cos u \, du \end{array}} \\
 &= \frac{5}{16} \int x^{-2} du = -\frac{5}{16x} \\
 &= -\frac{5}{16 \sin u} + C \\
 &= -\frac{5}{16 \left(\frac{5x}{\sqrt{25x^2 + 16}} \right)} + C \\
 &= -\frac{\sqrt{25x^2 + 16}}{16x} + C
 \end{aligned}$$

Keterangan:

$$\sin u = \frac{5x}{\sqrt{25x^2 + 16}}$$

3.4.3 Integral Memuat Bentuk $\sqrt{u^2 - a^2}$, dengan $a > 0$

Apabila integral memuat bentuk $\sqrt{u^2 - a^2}$ rasionalkan bentuk akar dengan mensubstitusikan $u = a \sec t$. Kondisi ini dapat dinyatakan pada suatu segitiga siku-siku seperti berikut:



$$\sqrt{u^2 - a^2}$$

$$\sec t = \frac{u}{a}; u = a \sec t; du = a \sec t \tan t \, dt$$

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \sqrt{(a \sec t)^2 - a^2}$$

$$= \sqrt{a^2 \sec^2 t - a^2}$$

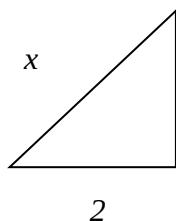
$$= \sqrt{a^2 (\sec^2 t - 1)} = \sqrt{a^2 \tan^2 t}$$

$$= a \tan t$$

Contoh Soal

Tentukan selesaian dari $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} dx$

Penyelesaian



$$\sqrt{x^2 - 4}$$

$$\sec u = \frac{x}{2}; x = 2 \sec u; dx = 2 \sec u \tan u \, du$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} dx &= \int \frac{1}{2 \sec u \sqrt{(2 \sec u)^2 - 4}} 2 \sec u \tan u \, du \\ &= \int \frac{1}{2 \sec u (4 \sec^2 u - 4)} 2 \sec u \tan u \, du \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{4(\sec^2 u - 1)}} \tan u \, du \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{4 \tan^2 u}} \tan u \, du \\ &= \int \frac{1}{2 \tan u} \tan u \, du \\ &= \int \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} u + C \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arcsec} \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

Untuk lebih memahami penggunaan konsep substitusi trigonometri di atas, perhatikan permasalahan di bawah ini!

Faqih diharuskan menyelesaikan persoalan terkait integral tak tentu di bawah ini:

$$a. \int \frac{\sqrt{9 - 4x^2}}{x} dx = \text{--- --}$$

$$b. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4x^2 + 9}} = \text{--- --}$$

Faqih menyatakan bahwa persoalan di atas tidak dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik integrasi metode substitusi dan teknik integrasi berupa integral parsial, tetapi persoalan di atas dapat diselesaikan menggunakan teknik integrasi dengan substitusi fungsi trigonometri. Selanjutnya Faqih menyatakan bahwa persoalan nomor 1 dapat diselesaikan dengan menggunakan substitusi fungsi trigonometri bentuk $\sqrt{a^2 - u^2}$, , sedangkan persoalan nomor 2 dapat diselesaikan dengan menggunakan substitusi fungsi trigonometri bentuk $\sqrt{a^2 + u^2}$,

Coba kalian amati permasalahan di atas, apakah pernyataan yang dinyatakan Faqiz di atas bernilai benar atau salah? Berikan alasan. Selanjutnya identifikasilah apakah teknik integrasi substitusi trigonomteri yang mana dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan nomor 1 dan 2, serta apakah apa alasannya?

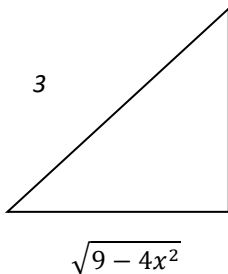
Untuk dapat menentukan apakah pernyataan Faqih tentang “persoalan di atas tidak dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik integrasi metode substitusi dan teknik integrasi berupa integral parsial”, maka silakan lakukan kegiatan yang sudah kalian pelajari pada bahan ajar tentang teknik integrasi metode substitusi dan teknik integrasi dengan integral parsial. Sedangkan untuk menentukan apakah pernyataan Faqih tentang “persoalan di atas dapat diselesaikan menggunakan teknik integrasi dengan substitusi fungsi trigonometri, persoalan nomor 1 dapat diselesaikan dengan menggunakan substitusi fungsi trigonometri bentuk $\sqrt{a^2 - u^2}$, , sedangkan persoalan nomor 2 dapat diselesaikan dengan menggunakan substitusi fungsi trigonometri bentuk $\sqrt{a^2 + u^2}$,” , maka mari kita lakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Identifikasi terlebih dahulu bentuk fungsi yang berbentuk akar pada persoalan yang diberikan. Untuk mengidentifikasi fungsi berbentuk akar yang terdapat pada soal tersebut, dapat dilakukan dengan mencocokkan fungsi berbentuk akar tersebut dengan salah satu bentuk. Untuk soal nomor 1, perhatikan bentuk akarnya: $\sqrt{9 - 4x^2}$. Fungsi bentuk akar pada soal nomor satu disesuaikan dengan salah satu integran bentuk akar yang terdapat pada substitusi trigonometri, yaitu: $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$, atau $\sqrt{u^2 - a^2}$. Fungsi bentuk akar pada soal nomor 1, sesuai dengan bentuk $\sqrt{a^2 - u^2}$, dimana $a^2 = 9$ dan $u^2 = 4x^2$.

2. Selanjutnya tentukan fungsi yang akan disubstitusi yang nantinya akan disubstitusikan ke fungsi berbentuk akar tersebut.

Untuk soal nomor 1, fungsi yang akan disubstitusi yaitu:

$x = \frac{3}{2} \sin t, dx = \frac{3}{2} \cos t$, diperoleh dengan aturan yang dijabarkan sebelumnya.



$$\sin u = \frac{2x}{3} \rightarrow 2x = 3 \sin u$$

$$x = \frac{3}{2} \sin u$$

$$dx = \frac{3}{2} \cos u \, du$$

3. Setelah diperoleh fungsi yang akan disubstitusikan, maka langkah selanjutnya adalah mensubstitusikan fungsi tersebut ke dalam fungsi yang berbentuk akar. Untuk soal nomor 1, pensubstitusiannya dapat diperhatikan di bawah ini:

$$\int \frac{\sqrt{9 - 4x^2}}{x} dx = \int \frac{\sqrt{9 - 4\left(\frac{3}{2} \sin u\right)^2}}{\frac{3}{2} \sin u} \frac{3}{2} \cos u \, du$$

4. Selanjutnya, lakukan operasi perhitungan sedemikian rupa dengan tujuan untuk menghilangkan tanda akar yang terdapat pada fungsi berbentuk akar tersebut, dan kemudian untuk menemukan solusi akhirnya. Untuk soal nomor 1 di atas, maka proses operasi perhitungan dijabarkan di bawah ini.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} dx &= \int \frac{\sqrt{9-4(\frac{3}{2}\sin u)^2}}{\frac{3}{2}\sin u} \frac{3}{2} \cos u du \\
 &= \int \frac{\sqrt{9-4(\frac{9}{4}\sin^2 u)}}{\frac{3}{2}\sin u} \frac{3}{2} \cos u du \\
 &= \int \frac{\sqrt{9-9\sin^2 u}}{\sin u} \cos u du \\
 &= \int \frac{\sqrt{9(1-\sin^2 u)}}{\sin u} \cos u du \\
 &= \int \frac{\sqrt{9\cos^2 u}}{\sin u} \cos u du \\
 &= \int \frac{3\cos u}{\sin u} \cos u du \\
 &= 3 \int \frac{\cos^2 u}{\sin u} du \\
 &= 3 \int \frac{1-\sin^2 u}{\sin u} du \\
 &= 3 \int \frac{1}{\sin u} du - 3 \int \frac{\sin^2 u}{\sin u} du \\
 &= 3 \int \operatorname{cosec} u du - 3 \int \sin u du \\
 &= 3 \ln|\operatorname{cosec} u - \cot u| + 3 \cos u + C \\
 &= 3 \ln \left| \frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{2x} \right| + \sqrt{9-4x^2} + C
 \end{aligned}$$

Keterangan:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{cosec} u &= \frac{1}{\sin u} = \frac{1}{2x/3} = \frac{3}{2x}; \cot u = \frac{\cos u}{\sin u} = \frac{\frac{\sqrt{9-4x^2}}{3}}{\frac{2x}{3}} \\
 &= \frac{\sqrt{9-4x^2}}{2x}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan paparan di atas, maka silakan tentukan sendiri apakah pernyataan yang dinyatakan oleh Faqih tentang “persoalan di atas dapat diselesaikan menggunakan teknik integrasi dengan substitusi fungsi trigonometri, persoalan nomor 1 dapat

diselesaikan dengan menggunakan substitusi fungsi trigonometri bentuk $\sqrt{a^2 - u^2}$, “, bernilai benar atau salah.

Selanjutnya silakan lakukan aktivitas seperti di kegiatan ayo mulai bekerja untuk menentukan nilai kebenaran dari pernyataan Faqih tentang “persoalan nomor 2 dapat diselesaikan dengan menggunakan substitusi fungsi trigonometri bentuk $\sqrt{a^2 + u^2}$,”

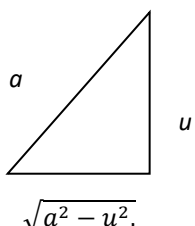
Setelah melakukan aktivitas di atas, maka coba kalian temukan selesaian dari persoalan di bawah ini:

Tentukan selesaian dari $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} dx$

Dalam menemukan selesaian persoalan pada kegiatan **ayo lakukan inovasi dan maknai hasilnya**, tentukan bentuk integran fungsi trigonometri mana yang sesuai? Berikan alasan!. Kemudian tentukan selesainnya!

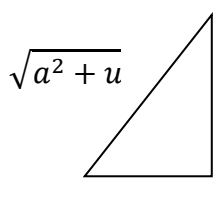
RANGKUMAN

1. Apabila integran memuat bentuk $\sqrt{a^2 - u^2}$, andaikan bahwa $u = a \sin(t)$, dengan $a > 0$. Kondisi ini dapat dinyatakan pada suatu segitiga siku-siku seperti berikut:



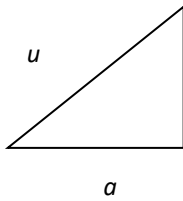
$$\begin{aligned} \sin t &= \frac{u}{a}; u = a \sin t \\ du &= a \cos t \, dt \\ \sqrt{a^2 - u^2} &= \sqrt{a^2 - (a \sin t)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - (a^2 \sin^2 t)} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 t} = a \cos t; t = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) \end{aligned}$$

2. Apabila integran memuat bentuk $\sqrt{a^2 + u^2}$, rasionalkan bentuk akar dengan mensubstitusikan $u = a \tan t$. Kondisi ini dapat dinyatakan pada suatu segitiga siku-siku seperti berikut:



$$\begin{aligned} \tan t &= \frac{u}{a}; u = a \tan t; du = a \sec^2 t \, dt \\ \sqrt{a^2 + u^2} &= \sqrt{a^2 + (a \tan t)^2} = \sqrt{a^2 + (a^2 \tan^2 t)} \\ &= \sqrt{a^2(1 + \tan^2 t)} = \sqrt{a^2 \sec^2 t} \\ &= a \sec t \end{aligned}$$

3. Apabila integran memuat bentuk $\sqrt{u^2 - a^2}$ rasionalkan bentuk akar dengan mensubstitusikan $u = a \sec t$. Kondisi ini dapat dinyatakan pada suatu segitiga siku-siku seperti berikut:



$$\begin{aligned}
 \sec t &= \frac{u}{a}; u = a \sec t; du = a \sec t \tan t \, dt \\
 \sqrt{u^2 - a^2} &= \sqrt{(a \sec t)^2 - a^2} \\
 &= \sqrt{a^2 \sec^2 t - a^2} \\
 &= \sqrt{a^2 (\sec^2 t - 1)} = \sqrt{a^2 \tan^2 t} \\
 &= a \tan t
 \end{aligned}$$

4. Untuk dapat menggunakan teknik integrasi substitusi trigonometri, maka ada beberapa hal yang harus diperhatikan:
- Perhatikan persoalan integral yang diberikan. Jika persoalan integral yang diberikan mengandung fungsi berbentuk akar, maka salah cara yang dapat dilakukan adalah dengan menggunakan teknik substitusi trigonometri.
 - Dalam menggunakan teknik integrasi substitusi trigonometri, maka terlebih dahulu kalian harus sudah memahami integral fungsi trigonometri.

LATIHAN

1. Dinyatakan bahwa $\int \frac{x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx$ dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik integrasi integral parsial dan substitusi. Tentukan apakah pernyataan tersebut bernilai benar atau salah?. Jika menurut mu benar, maka nyatakan proses penyelesaian hitung integral tersebut dengan menggunakan teknik integral parsial dan substitusi, sedangkan apabila menurut mu pernyataan tersebut masih salah, nyatakan teknik integrasi apa yang dapat digunakan dengan disertai alasan serta nyatakan proses selesainya.
2. Dinyatakan bahwa selesaian dari $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2+25}} = -\frac{\sqrt{4x^2+25}}{25x} + c$. Nyatakan proses untuk menemukan selesaian dari hitung integral tersebut!.
3. Lengkapi selesaian hitung integral di bawah ini!

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} dx \\
 &= \int \frac{1}{2(\dots)\sqrt{(2\sec u)^2-4}} (\dots\dots\dots) du \\
 &= \int \frac{1}{2(\dots)(\dots\dots\dots)-4} (\dots\dots\dots) \\
 &= \int \frac{1}{\sqrt{(\dots\dots\dots)-1}} \tan u \, du \\
 &= \int \frac{1}{\sqrt{(\dots\dots\dots)}} \tan u \, du \\
 &= \int \frac{1}{(\dots\dots\dots)\tan u} \tan u \, du \\
 &= \frac{1}{2} u + C \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{arcsec} \frac{x}{2} + C
 \end{aligned}$$

4. Perhatikan penyelesaian hitung integral di bawah ini!

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}} dx = \int \frac{4 \tan u}{4 \sec u} (4 \sec u du)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}} dx = 4 \tan u + c; u = \frac{4}{\sqrt{x^2 - 16}}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}} dx = \sqrt{x^2 - 16} + c$$

Apakah penyelesaian yang dinyatakan di atas sudah benar? Jika ya, maka nyatakan cara substitusi trigonometri mana yang digunakan dengan disertai alasan. Jika masih salah, maka nyatakan bagian mana yang masih salah menurut mu, dan nyatakan jawaban yang benarnya!

5. Dinyatakan bahwa penyelesaian dari $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}} dx = \frac{3}{2} \arcsin(x-1) - 2\sqrt{2x-x^2} - \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2}$

Tentukan apakah penyelesaian yang diberikan sudah benar atau belum?

- Jika sudah benar, nyatakan proses untuk menemukan penyelesaian tersebut!
- Jika masih salah, tentukan proses untuk menemukan jawaban yang benarnya!

3.5 Integral Fungsi Rasional

Fungsi rasional adalah fungsi yang merupakan hasil bagi dua fungsi polinomial. Apabila pangkat dari pembilang lebih besar atau sama dengan pangkat dari penyebut, maka diperoleh fungsi rasional tak sejati, dan jika pangkat dari penyebut lebih besar dari pembilang fungsi rasional dikatakan sebagai fungsi rasional sejati. Ada 4 kemungkinan yang muncul dalam fungsi rasional sejati, yaitu:

3.5.1 Bentuk Linier Tak Berulang

Apabila fungsi rasional sejati $p(x)/q(x)$, dimana faktor dari penyebut $q(x)$ semuanya linier tidak berulang, yaitu:

$$q(x) = (a_1x - b_1)(a_2x - b_2)\dots(a_nx - b_n)$$

Tulislah fungsi rasional menjadi;

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{a_1x - b_1} + \frac{A_2}{a_2x - b_2} + \dots + \frac{A_n}{a_nx - b_n}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}\int \frac{p(x)}{q(x)} dx &= \int \left(\frac{A_1}{a_1x - b_1} + \frac{A_2}{a_2x - b_2} + \dots + \frac{A_n}{a_nx - b_n} \right) dx \\ &= \frac{A_1}{a_1} \ln|a_1x - b_1| + \frac{A_2}{a_2} \ln|a_2x - b_2| + \dots + \\ &\quad \frac{A_n}{a_n} \ln|a_nx - b_n| + C\end{aligned}$$

dimana konstanta $A_1, A_2, \dots, A_n$ yang harus ditentukan dengan menggunakan konsep aljabar pecahan.

Contoh Soal

Tentukan selesaian dari $\int \frac{3x-1}{x^2-x-6} dx$

Penyelesaian

1. $\int \frac{3x-1}{x^2-x-6} dx = \int \frac{3x-1}{(x-3)(x+2)} dx$; tulislah integran menjadi,

$$\frac{3x-1}{x^2-x-6} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+2)};$$

dengan A dan B adalah konstanta-konstanta yang harus ditentukan

$$\frac{3x-1}{x^2-x-6} = \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

$$3x - 1 = A(x+2) + B(x-3)$$

$$3x - 1 = Ax + 2A + Bx - 3B$$

$$3x - 1 = (A + B)x + 2A - 3B$$

dengan menggunakan metode eliminasi,

$$\begin{array}{rcl} A + B & = & 3 \\ 2A - 3B & = & -1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} x-3 \\ x \quad 1 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{rcl} -3A - 3B & = & -9 \\ \underline{2A - 3B} & = & -1 \end{array}$$

$$-5A = -8$$

$$A = \frac{8}{5}$$

$$A + B = 3$$

$$\frac{8}{5} + B = 3$$

$$B = 3 - \frac{8}{5} = \frac{7}{5}$$

Sehingga diperoleh $A = \frac{8}{5}$, dan $B = \frac{7}{5}$

$$\begin{aligned}
 \text{Jadi, } \int \frac{3x-1}{x^2-x-6} dx &= \int \frac{A}{(x-3)} dx + \int \frac{B}{(x+2)} dx \\
 &= \frac{8}{5} \int \frac{1}{(x-3)} dx + \frac{7}{5} \int \frac{1}{(x+2)} dx \\
 &= \frac{8}{5} \ln|x-3| + \frac{7}{5} \ln|x+2| + C
 \end{aligned}$$

3.5.2 Bentuk Linier Berulang

Apabila fungsi rasional sejati $p(x)/q(x)$, dimana faktor dari penyebut $q(x)$ memuat faktor linier berulang, misalkan $(ax - b)^m$. Tulislah integran yang memuat faktor linier berulang itu menjadi m jumlahan pecahan parsial,

$$\frac{A_m}{(ax - b)^m} + \frac{A_{m-1}}{(ax - b)^{m-1}} + \dots + \frac{A_1}{(ax - b)}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
 \int \left(\frac{A_m}{(ax - b)^m} + \frac{A_{m-1}}{(ax - b)^{m-1}} + \dots + \frac{A_1}{(ax - b)} \right) dx \\
 = \frac{A_m}{a} \frac{(ax - b)^{1-m}}{1 - m} + \frac{A_{m-1}}{a} \frac{(ax - b)^{1-(m-1)}}{1 - (m-1)} + \dots \\
 + \frac{A_1}{a} \ln|ax - b| + C
 \end{aligned}$$

dengan $A_m, A_{m-1}, \dots, A_1$ adalah konstanta-konstanta yang harus ditentukan nilainya.

Contoh Soal

Tentukan selesaian dari $\int \frac{3x^2-8x+13}{x^3+x^2-5x+3} dx$

Penyelesaian

Pandang, $x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x + 3)(x - 1)^2$, tuliskan integral menjadi,

$$\frac{3x^2 - 8x + 13}{x^3 + x^2 - 5x + 3} = \frac{A}{(x + 3)} + \frac{B}{(x - 1)} + \frac{C}{(x - 1)^2}$$

$$\frac{3x^2 - 8x + 13}{x^3 + x^2 - 5x + 3} = \frac{A(x - 1)^2 + B(x + 3)(x - 1) + C(x + 3)}{(x + 3)(x - 1)^2}$$

dengan A, B, dan C adalah konstanta-konstanta yang harus ditentukan nilainya.

$$3x^2 - 8x + 13 = A(x - 1)^2 + B(x + 3)(x - 1) + C(x + 3)$$

$$3x^2 - 8x + 13 = A(x^2 - 2x + 1) + B(x^2 - x + 3x - 3) + Cx + 3C$$

$$3x^2 - 8x + 13 = Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + 3Bx - 3B + Cx + 3C$$

$$x^2 - 8x + 13 = Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 + 2Bx - 3B + Cx + 3C$$

$$3x^2 - 8x + 13 = (A + B)x^2 + (-2A + 2B + C)x + A - 3B + 3C$$

dengan menggunakan metode eliminasi:

$$\begin{aligned} A + B &= 3 \dots\dots(1) \\ -2A + 2B + C &= -8 \dots\dots(2) \\ A - 3B + 3C &= 13 \dots\dots(3) \end{aligned}$$

Eliminasi persamaan (2) dan persamaan (3)

$$\begin{array}{rcl} -2A + 2B + C & = & -8 \quad \left| \begin{array}{l} \times 3 \\ \times 1 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} -6A + 6B + 3C = -24 \\ A - 3B + 3C = 13 \end{array} \\ A - 3B + 3C & = & 13 \end{array}$$

$$-7A + 9B = -37 \dots\dots(4)$$

Eliminasi persamaan (4) dan persamaan (1)

$$\begin{array}{rcl} -7A + 9B & = & -37 \quad \left| \begin{array}{l} \times 1 \end{array} \right| \Rightarrow -7A + 9B = -37 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 A + B & = & 3 \quad \times 9 \\
 \hline
 9A + 9B & = & 27 \\
 -16A & = & -64 \\
 A & = & 4
 \end{array}$$

Karena $A = 4$, maka diperoleh:

$$A + B = 3$$

$$4 + B = 3$$

$$B = -1$$

Karena $A = 4$ dan $B = -1$, maka diperoleh:

$$A - 3B + 3C = 13$$

$$4 - 3(-1) + 3C = 13$$

$$4 + 3 + 3C = 13$$

$$3C = 13 - 7$$

$$3C = 6$$

$$C = 2$$

Sehingga diperoleh $A = 4$, $B = -1$ dan $C = 2$

$$\text{Jadi } \int \frac{3x^2 - 8x + 13}{x^3 + x^2 - 5x + 3} dx = \int \frac{A}{(x+3)} dx + \int \frac{B}{(x-1)} dx + \int \frac{C}{(x-1)^2} dx$$

Misal: $u = x - 1$
 $du = dx$

$$= \int \frac{4}{(x+3)} dx + \int \frac{(-1)}{(x-1)} dx + \int \frac{2}{(x-1)^2} dx$$

$$= 4 \int \frac{dx}{(x+3)} - 1 \int \frac{dx}{(x-1)} + 2 \int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= 4 \ln|x + 3| - \ln|x - 1| + 2 \int \frac{du}{u^2}$$

$$= 4 \ln|x + 3| - \ln|x - 1| + 2 \int u^{-2} du$$

$$= 4 \ln|x + 3| - \ln|x - 1| + 2 - \frac{1}{u} + C$$

$$= 4 \ln|x + 3| - \ln|x - 1| + \frac{2}{-(x-1)} + C$$

3.5.3 Bentuk Kuadrat Tak Berulang

Untuk tiap faktor kuadratik yang tidak dapat difaktorkan lagi atau $ax^2 + bx + c$ yang muncul sekali dalam penyebut pecahan rasional yang dapat dinyatakan sebagai pecahan parsial berbentuk $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, dimana A dan B adalah konstanta yang harus dicari.

Contoh Soal

Tentukan selesaian dari $\int \frac{dx}{x^3+x}$

Penyelesaian

$$\int \frac{dx}{x^3+x} = \int \frac{dx}{x(x^2+1)}$$

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \rightarrow \frac{1}{x^3+x} = \frac{A(x^2+1)+Bx(x)+C(x)}{x(x^2+1)}$$

$$1 = A(x^2+1) + Bx^2 + Cx$$

$$1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$$

$$1 = (A+B)x^2 + Cx + A$$

Sehingga diperoleh:

$$A+B=0 \dots (1)$$

$$C=0 \dots (2)$$

$$A=1 \dots (3)$$

Karena $A=1$, maka $1+B=0$, sehingga diperoleh $B=-1$

$$\text{Jadi } \int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \frac{A}{x} dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+1} dx$$

$$= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{(-1)x+0}{x^2+1} dx$$

$$= \ln|x| - \int \frac{x dx}{x^2+1}$$

$$= \ln|x| - \int \frac{\frac{1}{2} du}{u}$$

$$\text{Misalkan: } u = x^2 + 1$$

$$du = 2x dx$$

$$du/2 = x dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \ln|x| - \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} \\
 &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|u| \\
 &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1|
 \end{aligned}$$

3.5.4 Bentuk Kuadrat Berulang

Untuk faktor kuadratik yang berulang n kali dengan bentuk $ax^2 + bx + c$ dalam penyebut pada pecahan rasional, ditulis sebagai jumlah dari n pecahan parsial dengan bentuk:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots \dots \dots \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}, \text{ dimana } A$$

dan B adalah konstansta yang harus dicari.

Contoh Soal

Tentukan selesaian dari $\int \frac{x^3-4x}{(x^2+1)^2} dx$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3 - 4x}{(x^2 + 1)^2} dx &= \int \frac{x^3 - 4x}{(x^2 + 1)(x^2 + 1)} dx \\
 \frac{x^3 - 4x}{(x^2 + 1)^2} &= \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} \\
 \frac{x^3 - 4x}{(x^2 + 1)^2} &= \frac{Ax(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + Cx + D}{(x^2 + 1)^2} \\
 x^3 - 4x &= Ax(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + Cx + D \\
 x^3 - 4x &= Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx + D \\
 x^3 - 4x &= Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + B + D
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh:

$$A = 1$$

$$B = 0$$

$$A + C = -4$$

$$1 + C = -4$$

$$C = -5$$

$$B + D = 0$$

$$0 + D = 0$$

$$D = 0$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 4x}{(x^2 + 1)^2} dx &= \int \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)} dx + \int \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} dx \\ &= \int \frac{(1)x+0}{(x^2+1)} dx + \int \frac{(-5)x+}{(x^2+1)} \quad \begin{array}{l} \text{Misalkan: } u = x^2 + 1 \\ du = 2x dx \\ du/2 = x dx \end{array} \\ &= \int \frac{x}{(x^2+1)} dx + \int \frac{-5x}{(x^2+1)} \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}du}{u} - 5 \int \frac{\frac{1}{2}du}{u^2} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} - 5 \left(\frac{1}{2} \right) \int u^{-2} du \\ &= \frac{1}{2} \ln|u| - \frac{5}{2} \left(-\frac{1}{u} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + \frac{5}{2u} + C \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + \frac{5}{2(x^2+1)} + C \end{aligned}$$

Untuk lebih memahami penggunaan integral fungsi rasional dalam penyelesaian hitung integral, perhatikan permasalahan di bawah ini!

- a. Dinyatakan bahwa $\int \frac{3x-1}{x^2-x-6} dx$ memiliki selesaian $= \frac{8}{5} \ln|x - 3| + \frac{7}{5} \ln|x + 2| + C$. Nyatakan proses untuk mendapatkan selesaiannya!

- b. Dinyatakan bahwa $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2+25}}$ dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik integrasi substitusi trigonometri. Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan di atas. Jika menurut mu bernilai benar, berikan alasan!. Sedangkan apabila bernilai salah, berikan alasan dan tentukan teknik integrasi apa yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan tersebut serta gunakan teknik tersebut untuk menyatakan proses selesaian!
- c. Coba kalian amati permasalahan di atas, untuk persoalan nomor 1 kalian diharuskan mampu untuk menunjukkan proses penyelesaian dari hitung integral yang diberikan, sehingga menemukan selesaian yang sama dengan selesaian yang sudah dinyatakan. Sedangkan untuk persoalan nomor 2, kalian di haruskan mengevaluasi dan menganalisis pernyataan yang telah diberikan dengan disertai alasan. Ayo lakukan diskusi terkait persoalan yang telah diidentifikasi.

Untuk dapat menunjukkan proses selesaian dari hitung integral pada persoalan nomor 1, maka mari kita lakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Identifikasi terlebih dahulu apakah persoalan yang diberikan dapat diselesaikan dengan salah satu teknik integrasi yang telah atau yang sedang kalian pelajari. Untuk persoalan nomor 1, dapat kita selesaikan dengan menggunakan teknik integrasi integral fungsi rasional, karena fungsi yang terdapat pada

hitung integral tersebut berbentuk hasil bagi dua fungsi polinomial.

2. Selanjutnya, setelah kita dapat mengidentifikasi teknik mana yang digunakan, maka kita harus mengidentifikasi kemungkinan- kemungkinan mana yang sesuai dengan kemungkinan yang muncul dalam fungsi rasional. Untuk persoalan nomor 1, kemungkinan yang sesuai adalah kemungkinan bentuk linier tak berulang, dimana fungsi penyebut dari persoalan tersebut berbentuk linier tak berulang
- $$(x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2))$$

3. Setelah ditentukan kemungkinan mana yang sesuai, maka langkah selanjutnya adalah kita memulai penyelesaian persoalan tersebut dengan menggunakan aturan yang telah ditentukan. Untuk persoalan nomor 1 dapat diselesaikan dengan menggunakan kemungkinan a, dinyatakan sebagai berikut:

$$\int \frac{3x-1}{x^2-x-6} dx = \int \frac{3x-1}{(x-3)(x+2)} dx ; \text{ tulislah integran menjadi,}$$

$$\frac{3x-1}{x^2-x-6} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+2)};$$

dengan A dan B adalah konstanta-konstanta yang harus ditentukan

$$\frac{3x-1}{x^2-x-6} = \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

$$3x - 1 = A(x+2) + B(x-3)$$

$$3x - 1 = Ax + 2A + Bx - 3B$$

$$3x - 1 = (A + B)x + 2A - 3B$$

dengan menggunakan metode eliminasi,

$$\begin{array}{rcl} A + B & = 3 & \left| \begin{array}{l} x-3 \\ x-1 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{rcl} 3A - 3B & = & -9 \\ 2A - 3B & = & -1 \\ \hline -5A & = & -8 \\ A & = & \frac{8}{5} \end{array} \end{array}$$

$$A + B = 3$$

$$\frac{8}{5} + B = 3$$

$$B = 3 - \frac{8}{5} = \frac{7}{5}$$

Sehingga diperoleh $A = \frac{8}{5}$, dan $B = \frac{7}{5}$

$$\begin{aligned} \text{Jadi, } \int \frac{3x-1}{x^2-x-6} dx &= \int \frac{A}{(x-3)} dx + \int \frac{B}{(x+2)} dx \\ &= \frac{8}{5} \int \frac{1}{(x-3)} dx + \frac{7}{5} \int \frac{1}{(x+2)} dx \\ &= \frac{8}{5} \ln|x-3| + \frac{7}{5} \ln|x+2| + C \end{aligned}$$

Selanjutnya silakan lakukan aktivitas seperti di kegiatan ayo mulai bekerja untuk menentukan nilai kebenaran dari pernyataan “persoalan nomor 2 dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik integrasi substitusi trigonometri. Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan di atas. Jika menurut mu bernilai benar, berikan alasan!. Sedangkan apabila bernilai salah, berikan alasan dan tentukan teknik integrasi apa yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan tersebut serta gunakan teknik tersebut untuk menyatakan proses selesian!”

Setelah melakukan aktivitas di atas, maka coba kalian temukan selesaian dari persoalan di bawah ini:

Tentukan selesaian dari $\int \frac{3x^2-8x+13}{x^3+x^2-5x+3} dx$

Dalam menemukan selesaian persoalan pada kegiatan **ayo lakukan inovasi dan maknai hasilnya**, tentukan apakah persoalan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik integrasi fungsi rasional? Berikan alasan!. Kemudian tentukan selesainnya!

RANGKUMAN

1. Bentuk Linier Tak Berulang

Apabila fungsi rasional sejati $p(x)/q(x)$, dimana faktor dari penyebut $q(x)$ semuanya linier tidak berulang, yaitu:

$$q(x) = (a_1x - b_1)(a_2x - b_2).....(a_nx - b_n)$$

Tulislah fungsi rasional menjadi;

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{a_1x - b_1} + \frac{A_2}{a_2x - b_2} + \dots + \frac{A_n}{a_nx - b_n}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}\int \frac{p(x)}{q(x)} dx &= \int \left(\frac{A_1}{a_1x - b_1} + \frac{A_2}{a_2x - b_2} + \dots + \frac{A_n}{a_nx - b_n} \right) dx \\ &= \frac{A_1}{a_1} \ln|a_1x - b_1| + \frac{A_2}{a_2} \ln|a_2x - b_2| + \dots + \\ &\quad \frac{A_n}{a_n} \ln|a_nx - b_n| + C\end{aligned}$$

dimana konstanta $A_1, A_2, \dots, A_n$ yang harus ditentukan dengan menggunakan konsep aljabar pecahan.

2. Bentuk Linier Berulang

Apabila fungsi rasional sejati $p(x)/q(x)$, dimana faktor dari penyebut $q(x)$ memuat faktor linier berulang, misalkan $(ax - b)^m$. Tulislah integran yang memuat faktor linier berulang itu menjadi m jumlahan pecahan parsial,

$$\frac{A_m}{(ax - b)^m} + \frac{A_{m-1}}{(ax - b)^{m-1}} + \dots + \frac{A_1}{(ax - b)}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{A_m}{(ax-b)^m} + \frac{A_{m-1}}{(ax-b)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_1}{(ax-b)} \right) dx \\ = \frac{A_m}{a} \frac{(ax-b)^{1-m}}{1-m} + \frac{A_{m-1}}{a} \frac{(ax-b)^{1-(m-1)}}{1-(m-1)} \\ + \cdots + \frac{A_1}{a} \ln|ax-b| + C \end{aligned}$$

dengan $A_m, A_{m-1}, \dots, A_1$ adalah konstanta-konstanta yang harus ditentukan nilainya.

3. Bentuk Kuadrat Tak Berulang

Untuk tiap faktor kuadratik yang tidak dapat difaktorkan lagi atau $ax^2 + bx + c$ yang muncul sekali dalam penyebut pecahan rasional yang dapat dinyatakan sebagai pecahan parsial berbentuk $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, dimana A dan B adalah konstanta yang harus dicari.

4. Bentuk Kuadrat Berulang

Untuk faktor kuadratik yang berulang n kali dengan bentuk $ax^2 + bx + c$ dalam penyebut pada pecahan rasional, ditulis sebagai jumlah dari n pecahan parsial dengan bentuk:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots \cdots \cdots \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}, \text{ dimana } A \text{ dan } B$$

adalah konstanta yang harus dicari

5. Untuk dapat menggunakan teknik integrasi substitusi trigonometri, maka ada beberapa hal yang harus diperhatikan:

- a. Perhatikan persoalan integral yang diberikan. Jika persoalan integral yang diberikan mengandung fungsi rasional (fungsi yang merupakan hasil bagi dua fungsi polinom), maka salah cara yang dapat dilakukan adalah dengan menggunakan teknik integral fungsi rasional
- b. Selanjutnya, identifikasilah kesesuaian persoalan yang diberikan dengan salah satu kemungkinan yang terdapat pada fungsi rasional. Identifikasi dapat dilakukan dengan cara mencari bentuk lain dari fungsi rasional yang diberikan sehingga sesuai dengan salah satu kemungkinan yang terdapat pada fungsi rasional.
- c. Setelah dapat menentukan kemungkinan mana yang sesuai, maka lakukan proses perhitungan yang sesuai dengan proses hitung integral fungsi rasional.

LATIHAN

1. Dinyatakan bahwa selesaian dari $\int \frac{3x-2}{x^2+2x-8} dx = \frac{7}{3} \ln|x+4| + \frac{2}{3} \ln|x-2| + c$. Nyatakan proses untuk mendapatkan selesaiannya!

2. Apakah $\int \frac{1-2x}{2x^2-11x+12} dx$ dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik integral fungsi rasional kemungkinan ke-3? Berikan alasan!

3. Silakan lengkapi selesaian hitung integral berikut dengan menggunakan salah satu kemungkinan yang terdapat pada integral fungsi rasional.

$$\int \frac{5x-2}{x^3-2x^3-3x} dx = \int \frac{5x-2}{(x)(x+1)(x-3)} dx$$
$$\frac{5x-2}{(x)(x+1)(x-3)} = \frac{A}{\dots\dots\dots} + \frac{B}{\dots\dots\dots} + \frac{C}{\dots\dots\dots}$$

4. Dinyatakan bahwa $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx$ dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik integrasi substitusi trigometri. Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan di atas. Jika menurut mu bernilai benar, berikan alasan!. Sedangkan apabila bernilai salah, berikan alasan dan tentukan teknik integrasi apa yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan tersebut serta gunakan teknik tersebut untuk menyatakan proses selesaian!

5. Pada perhitungan $\int \frac{x^3-4x}{(x^2+1)^2} dx$ dengan menggunakan teknik integrasi fungsi rasional, diperoleh nilai koefisien $A=1$, $B=0$,

$C = -5$ dan $D = 0$. Tentukan selesaiannya dengan menggunakan nilai koefisien yang diberikan.

6. Tentukan selesaian dari integral-integral di bawah ini:

a. $\int \frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2} dx$

b. $\int \frac{2x^3+x+1}{x^4+2x^3+x^2} dx$

c. $\int \frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)(x^2+1)} dx$

d. $\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x+1)(x^2+2x+3)^2} dx$

e. $\int \frac{dx}{x^4+4x^2}$

f. $\int \frac{3x+4}{x^2-5x+6} dx$

g. $\int \frac{7x^3+20x^2+35x-13}{x^2(x^2+4x+13)} dx$

h. $\int \frac{2x^2+4}{x^4-3x^3+2x^2} dx$

i. $\int \frac{5x+17}{x^2-3x-10} dx$

j. $\int \frac{4x+24}{(x^2-1)(x^2-4x+5)} dx$

3.6 Integral Fungsi Eksponensial Asli dan Logaritma Natural

3.6.1 Pengantar Fungsi Eksponensial dan Logaritma

Pada pembahasan terdahulu (kalkulus differensial), kalian sudah mempelajari terkait berbagai jenis fungsi dan sifat-sifatnya. Salah satu jenis fungsi yang telah kalian pelajari adalah fungsi eksponensial. Pada bagian ini, kita akan sedikit mengulang jabaran fungsi eksponensial dan fungsi logaritma natural sebelum kita membahas terkait integral dari fungsi eksponensial dan logaritma natural.

Fungsi eksponensial merupakan invers dari fungsi logaritma natural yang ditulis $y = e^x \leftrightarrow x = \ln y$. Dalam penulisan fungsi eksponensial diperkenalkan bilangan e , dimana bilangan e ini adalah bilangan yang real positif yang tidak dapat dinyatakan sebagai akar polynomial dengan koefisien bilangan bulat. Nilai bilangan e diperoleh dari formulasi yang dirancang oleh *Euler* yaitu mendekati sampai dengan 18 digit

$$e \approx 2,7182818288459045235$$

Eksponen memiliki beberapa sifat, diantaranya:

Andaikan a dan b merupakan sembarang bilangan real, maka:

1. $e^a e^b = e^{a+b}$
2. $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

Selanjutnya suatu logaritma dengan basis e dinamakan logaritma natural dan ditulis dengan $\ln$.

Logaritma narutal memiliki beberapa sifat, diantaranya:

Andaikan a dan b adalah bilangan-bilangan real positif dan r adalah sebuah bilangan rasional, maka:

1. $\ln 1 = 0$
2. $\ln e = 1$
3. $\ln ab = \ln a + \ln b$
4. $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
5. $\ln a^r = r \cdot \ln a$

3.6.2 Defenisi Integral Fungsi Eksponensial dan Logaritma

Untuk menentukan rumus integral dari fungsi eksponensial dan logaritma, maka diperlukan rumus differensial dari fungsi eksponensial dan logaritma.

Bila u merupakan fungsi dari x yang dideferensialkan, maka integral fungsi eksponensial asli dan logaritma natural dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

Untuk dapat memahami penggunaan aturan integral fungsi logaritma natural dan eksponensial asli ini, silakan perhatikan contoh di bawah ini.

Contoh Soal

Tentukan apakah hitung integral di bawah ini dapat langsung diselesaikan dengan menggunakan aturan integral fungsi fungsi

logaritma natural dan eksponensial asli? kemukakan alasanmu dan kemudian tentukan selesainnya!

a. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

b. $\int \frac{(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}}{x} dx$

c. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx$

d. $\int e^x(1 + e^x)^5 dx$

e. $\int e^{\cos 2x} \sin 2x dx$

Penyelesaian

a. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

Hitung integral untuk nomor a ini tidak dapat langsung diselesaikan dengan menggunakan aturan integral fungsi fungsi logaritma natural. Hal ini dikarenakan bentuk $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ tidak memiliki kesamaan dengan bentuk $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$. Oleh sebab itu untuk menyelesaikan hitung integral tersebut dapat digunakan kolaborasi dengan teknik integrasi substitusi.

Misalkan:

$$u = \ln x$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

substitusikan pemisalan tersebut ke bentuk $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \int \sqrt{u} du$$

$$= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3} \ln^{\frac{3}{2}} x + c$$

b. $\int \frac{(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}}{x} dx$

Hitung integral untuk nomor a ini tidak dapat langsung diselesaikan dengan menggunakan aturan integral fungsi fungsi logaritma natural. Hal ini dikarenakan bentuk $\int \frac{(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}}{x} dx$ tidak memiliki kesamaan dengan bentuk $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$. Oleh sebab itu untuk menyelesaikan hitung integral tersebut dapat digunakan kolaborasi dengan teknik integrasi substitusi.

Misalkan:

$$u = 1 + \ln x$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

substitusikan pemisalan tersebut ke bentuk $\int \frac{(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}}{x} dx$

$$\int \frac{(1 + \ln x)^{\frac{3}{2}}}{x} dx = \int u^{\frac{3}{2}} du$$

$$= \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{5} (1 + \ln x)^{\frac{5}{2}} + c$$

c. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx$

Hitung integral untuk nomor a ini tidak dapat langsung diselesaikan dengan menggunakan aturan integral fungsi fungsi logaritma natural. Hal ini dikarenakan bentuk $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx$ tidak memiliki kesamaan dengan bentuk $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$. Oleh sebab itu untuk menyelesaikan hitung integral tersebut dapat digunakan kolaborasi dengan teknik integrasi substitusi.

Misalkan:

$$u = \ln x$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$v = \ln u$$

$$dv = \frac{1}{u} du$$

substitusikan pemisalan tersebut ke bentuk $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx &= \int \frac{\ln u}{u} du \\ &= \int v dv \\ &= \frac{1}{2} v^2 + c \\ &= \frac{1}{2} \ln^2 u + c \\ &= \frac{1}{2} \ln^2(\ln x) + c \end{aligned}$$

d. $\int e^x(1 + e^x)^5 dx$

Hitung integral untuk nomor a ini tidak dapat langsung diselesaikan dengan menggunakan aturan integral fungsi fungsi logaritma natural. Hal ini dikarenakan bentuk $\int e^x(1 +$

$e^x)^5 dx$ tidak memiliki kesamaan dengan bentuk $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$. Oleh sebab itu untuk menyelesaikan hitung integral tersebut dapat digunakan kolaborasi dengan teknik integrasi substitusi.

Misalkan:

$$u = 1 + e^x$$

$$du = e^x dx$$

substitusikan pemisalan tersebut ke bentuk $\int e^x (1 + e^x)^5 dx$

$$\begin{aligned}\int e^x (1 + e^x)^5 dx &= \int u^5 du \\ &= \frac{1}{6} u^6 + c \\ &= \frac{1}{6} (1 + e^x)^6 + c\end{aligned}$$

e. $\int e^{\cos 2x} \sin 2x dx$

Hitung integral untuk nomor a ini tidak dapat langsung diselesaikan dengan menggunakan aturan integral fungsi fungsi logaritma natural. Hal ini dikarenakan bentuk $\int e^{\cos 2x} \sin 2x dx$ tidak memiliki kesamaan dengan bentuk $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$. Oleh sebab itu untuk menyelesaikan hitung integral tersebut dapat digunakan kolaborasi dengan teknik integrasi substitusi.

Misalkan:

$$u = \cos 2x$$

$$du = -2 \sin 2x dx$$

$$\frac{1}{2} du = -\sin 2x dx$$

substitusikan pemisalan tersebut ke bentuk $\int e^{\cos 2x} \sin 2x \, dx$

$$\int e^{\cos 2x} \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int e^u \, du$$

$$= \frac{1}{2} e^u + c$$

$$= \frac{1}{2} e^{\cos 2x} + c$$

RANGKUMAN

1. Eksponen memiliki beberapa sifat, diantaranya:

Andaikan a dan b merupakan sembarang bilangan real, maka:

$$e^a e^b = e^{a+b}$$

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

2. Logaritma narutal memiliki beberapa sifat, diantaranya:

Andaikan a dan b adalah bilangan-bilangan real positif dan r adalah sebuah bilangan rasional, maka:

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^r = r \cdot \ln a$$

3. Bila u merupakan fungsi dari x yang dideferensialkan, maka integral fungsi eksponensial asli dan logaritma natural dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c ; \int e^x dx = e^x + c$$

LATIHAN

1. Dinyatakan bahwa selesaian dari $\int x^3 e^{2x} dx$ adalah $\frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{4}x e^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x} + c$. Tentukan:
 - a. Aturan integral apa yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan hitung integral di atas? Kemukakan alasan mu!
 - b. Gunakan aturan integral yang kamu nyatakan pada poin a di atas untuk menyelesaikan permasalahan hitung integral di atas!
 - c. Apakah selesaian yang kamu temukan sama dengan selesaian yang dinyatakan di atas?
 - Jika ya, nyatakan selesaiannya!
 - Jika tidak, nyatakan perbedaannya dengan disertai alasan!
2. Tentukan apakah $\int \frac{\cos(\ln 4x^2)}{x} dx$ dapat diselesaikan dengan menggunakan aturan integral fungsi trigonometri dan aturan integral fungsi logaritma natural!. Kemukakan alasanmu dan kemudian nyatakan selesaiannya.
3. Dinyatakan bahwa $\int \frac{\sec^3 x \cdot e^{\sin x}}{\sec x} dx = \tan x + e^{\sin x} + c$. Tentukan apakah pernyataan tersebut bernilai benar?
 - Jika ya, tentukan proses penyelesaian untuk menunjukkan pernyataan tersebut benar!
 - Jika tidak, nyatakan alasan mengapa belum benar dan nyatakan pernyataan yang benarnya menurut mu!
4. Perhatikan selesaian hitung integral berikut ini!

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + c \\ &= e^x(x^2 - 2x + 2) + c\end{aligned}$$

Tentukan:

- a. Aturan integral apakah yang digunakan dalam penyelesaian hitung integral di atas? Kemukakan alasan mu!
 - b. Apakah aturan integral yang digunakan sudah benar?
 - Jika ya, nyatakan alasan mu!
 - Jika tidak, nyatakan alasan mu dan tulislah jawaban yang benarnya!.
 - c. Apakah ada cara lain atau aturan integral lain yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan hitung integral di atas? Jika ada nyatakan selesalain permasalahan hitung integral di atas dengan cara tersebut dan nyatakan cara mana yang lebih efektif dengan menyertakan alasan mu!
5. Tentukan selesaian dari hitung integral berikut ini!
- a. $\int e^{3x+5} dx$
 - b. $\int \frac{5+\ln x}{x} dx$
 - c. $\int \frac{1}{x \ln x} dx$
 - d. $\int \frac{3+\ln^2 x}{x (\ln x - 1)} dx$
 - e. $\int (1+x)e^{(2x+x^2)} dx$

BAB 4

APLIKASI INTEGRAL TAK TENTU

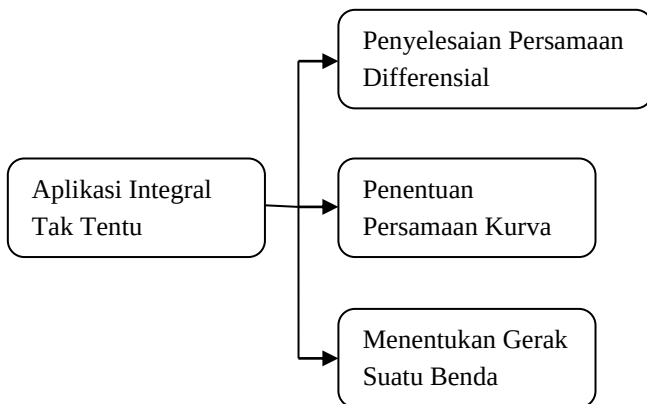
Pada Bab ini akan dibahas tentang aplikasi integral tak tentu yang di susun dalam beberapa sub – bab materi. Materi yang disajikan pada Bab 4 terkait dengan aplikasi integral tak tentu yang terdiri dari penyelesaian persamaan differensial, penentuan persamaan kurva dan menentukan gerak suatu benda. Selain itu, untuk menambah pemahaman mahasiswa, dalam Bab ini juga disajikan beberapa contoh soal beserta penyelesaiannya, kemudian dilengkapi juga dengan rangkuman serta latihan.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari dan mentelaah materi yang terdapat pada bab ini, mahasiswa di harapkan mampu:

1. Menggunakan aturan integral tak tentu untuk menyelesaikan permasalahan matematis dan kehidupan sehari – hari.
2. Menggunakan aturan integrasi untuk menyelesaikan permasalahan matematis dan kehidupan sehari – hari.

PETA KONSEP



4.1 Penyelesaian Persamaan Differensial

Integral tak tentu dapat digunakan dalam penyelesaian persamaan differensial yang peubahnya dapat dipisah dan persamaan differensial linier tingkat satu. Bentuk $\frac{dy}{dx} = 2x$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$ dan $\frac{dy}{dx} + 2xy = x$ merupakan persamaan differensial, yang solusinya dapat dicari dengan menggunakan integral tak tentu. Untuk lebih memahaminya, coba perhatikan contoh di bawah ini.

Contoh Soal

1. Tentukan y fungsi dari x yang memenuhi persamaan differensial

$$\frac{dy}{dx} = x - 2xy$$

Penyelesaian

Persamaan differensial $\frac{dy}{dx} = x - 2xy$ dapat diselesaikan dengan menggunakan metode peubah terpisah, proses penyelesaiannya dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = -x(2y - 1)$$

$$\frac{dy}{2y - 1} = -x \, dx$$

$$\int \frac{dy}{2y - 1} = - \int x \, dx$$

$$\ln|2y - 1| = -x^2 + c_1$$

$$|2y - 1| = e^{-x^2 + c_1} = C e^{-x^2}$$

$$y = \frac{1}{2} + C e^{-x^2}$$

2. Tentukan solusi umum dari persamaan differensial $(y - 2)dx + (2x - y)dy = 0$

Penyelesaian

Untuk mencari solusi dari persamaan differensial tersebut, maka langkah awal yang dapat kita lakukan adalah menyajikan persamaan differensial tersebut ke dalam bentuk lain

$$(y - 2)dx + (2x - y)dy = 0$$

$$(y - 2) \frac{dx}{dy} + (2x - y) = 0$$

$$(y - 2) \frac{dx}{dy} + 2x = y$$

$$x' + \frac{2x}{y - 2} = \frac{y}{y - 2}$$

Ingat jika nanti kalian sudah belajar Persamaan Differensial di Semester selanjutnya, maka kalian akan menemukan sebuah ketentuan dimana:

Solusi umum Persamaan Differensial $x' + p(y)x = q(y)$ adalah:

$$(f.i)x = \int (f.i)q(y)dy + C, \text{ dimana } f.i = e^{\int p(y)dy}$$

Jadi faktor integrasi dari persamaan differensial di atas adalah

$$f.i = e^{\int \frac{2}{y-2}dy} = e^{2 \ln|y-2|} = e^{\ln|y-2|^2} = (y - 2)^2$$

Jadi solusi umum dari persamaan differensial tersebut adalah:

$$(y - 2)^2 \cdot x = \int (y - 2)^2 \cdot \frac{y}{y - 2} dy + c$$

$$(y - 2)^2 \cdot x = \int (y^2 - 2y) dy$$

$$(y - 2)^2 \cdot x = \frac{1}{3}y^3 - y^2 + c$$

$$x = \frac{\frac{1}{3}y^3 - y^2 + c}{(y - 2)^2}$$

4.2 Penentuan Persamaan Kurva

Selain penggunaan integral tak tentu untuk menentukan penyelesaian persamaan differensial, integral tak tentu juga dapat digunakan dalam menentukan persamaan kurva. Integral tak tentu dapat digunakan dalam menentukan persamaan kurva jika diketahui koefisien arah/gradient ($\frac{dy}{dx}$) dan sebuah titik, misalkan Q (x,y) yang melalui kurva tersebut. Untuk lebih jelas, perhatikan contoh di bawah ini:

Contoh Soal

1. Koefisien arah dari sebuah kurva yang melalui titik Q (3,5) adalah $\frac{dy}{dx} = 3x - 5$, tentukan persamaan kurvanya

Penyelesaian

$$\frac{dy}{dx} = 3x - 5, \quad \text{dapat ditulis menjadi: } dy = 3x - 5 \, dx$$

$$\int dy = \int (3x - 5) \, dx$$

$$y = \frac{3}{2}x^2 - 5x + c$$

kurva melalui titik Q (3,5), maka

$$5 = \frac{3}{2}(3)^2 - 5(3) + c$$

$$C = 5 - \frac{27}{2} + 15$$

$$C = \frac{13}{2}$$

Jadi persamaan kurva yang dimaksud adalah $y = \frac{3}{2}x^2 - 5x + \frac{13}{2}$

yang merupakan persamaan parabola

2. Turunan kedua dari suatu kurva adalah $\frac{d^2y}{dx^2} = 3x - 5$. Kurva tersebut melalui titik Q (3,5) dan titik tersebut tegak lurus dengan garis $x + 2y - 5 = 0$. Tentukan persamaan kurvanya.

Penyelesaian

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3x - 5$$

$$\int \frac{d^2y}{dx^2} = \int (3x - 5)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^2 - 5x + c$$

Koefisien arah dari garis $x + 2y - 5 = 0$ adalah $y = -\frac{1}{2}(x - 5)$,

jadi koefisien arahnya $m = -\frac{1}{2}$, karena garis tegak lurus dengan

kurva maka koefisiennya menjadi $m = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$. Kurvanya melalui

Q (3,5), sehingga, jika disubstitusikan ke persamaan

$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^2 - 5x + c$ akan menjadi:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{2}(3)^2 - 5(3) + c$$

$$c = \frac{1}{2} - \frac{27}{2} + 15$$

$$c = \frac{1-27+30}{2}$$

$$c = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^2 - 5x + 2, \text{ persamaan ini harus kita integralkan sekali}$$

lagi, untuk mendapatkan persamaan kurvanya.

$$\int dy = \int \left(\frac{3}{2}x^2 - 5x + 2 \right) dx$$

$$y = \frac{3}{6}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + c$$

Substitusikan titik Q (3,5) ke persamaan :

$$y = \frac{3}{6}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + c, \text{ dan akan diperoleh}$$

$$5 = \frac{3}{6}(3)^3 - \frac{5}{2}(3)^2 + 2(3) + c$$

$$c = 5 - \frac{27}{6} + \frac{45}{6} - 6$$

$$c = \frac{30-27+45-36}{6}$$

$$c = 2$$

jadi persamaan kurva yang dimaksud adalah:

$$y = \frac{3}{6}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + 2$$

4.3 Menentukan Gerak Suatu Benda

Sebuah benda bergerak lurus dari satu titik menuju ke suatu titik akan memiliki jarak yang dinyatakan dengan s dan waktu tempuh t , maka kecepatan benda tersebut dapat kita tentukan

dengan menggunakan konsep integral tak tentu. Seperti yang kita ketahui, pada pembelajaran fisika, persamaan kecepatan sebuah benda yang bergerak dengan jarak s dan waktu tempuh t yaitu:

$$v = f'(t) = \frac{ds}{dt}$$

Selain kecepatan, kita juga mengenal istilah percepatan dalam gerak suatu benda. Persamaan percepatan sebuah benda yang bergerak dengan jarak s dan waktu tempuh t yaitu:

$$a = f''(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Untuk lebih memahami penggunaan konsep integral tak tentu dalam menentukan kecepatan dan percepatan suatu benda, perhatikan contoh – contoh di bawah ini:

Contoh Soal

1. Sebuah benda bergerak dengan kecepatan yang dinyatakan dengan persamaan $v = 5t^3 + 7t^2 + 9$ m / dtk. Tentukanlah jarak yang ditempuh, jika waktu tempuhnya adalah 10 detik, 20 detik

Penyelesaian

Kecepatan dinyatakan dengan persamaan: $v = 5t^3 + 7t^2 + 9$ m / dtk

Ingat di awal sudah kita nyatakan bahwa $v = f'(t) = \frac{ds}{dt}$, maka persamaan kecepatan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$v = f'(t) = \frac{ds}{dt} = 5t^3 + 7t^2 + 9$$

$$ds = (5t^3 + 7t^2 + 9) dt$$

$$\int ds = \int (5t^3 + 7t^2 + 9) dt$$

$$s = \frac{5}{4}t^4 + \frac{7}{3}t^3 + 9t + c; \text{ ini adalah persamaan jarak yang sudah}$$

kita peroleh. Untuk menentukan berapa jarak yang telah ditempuh, maka kita akan mensubstitusikan waktu yang telah ditentukan, yaitu $t = 10$ dtk, $t = 20$ dtk,

Pada saat keadaan awal, kendaraan bergerak dengan kecepatan awal $t = 0$ dan $s = 0$, sehingga $c = 0$.

Untuk $t = 10$ dtk, maka jarak yang ditempuh adalah:

$$s = \frac{5}{4}(10)^4 + \frac{7}{3}(10)^3 + 9(10) + 0$$

$$s = 12500 + 2333,33 + 90$$

$$s = 14923,33 \text{ m}$$

Untuk $t = 20$ dtk, maka jarak yang ditempuh adalah:

$$s = \frac{5}{4}(20)^4 + \frac{7}{3}(20)^3 + 9(20) + 0$$

$$s = 200000 + 18666,67 + 180$$

$$s = 218846,7 \text{ m}$$

2. Faqih membawa sebuah bola untuk permainan bola kaki. Bola tersebut di tendang oleh Faqih dengan kecepatan awal 15 m/dtk. Karena lapangannya bola memiliki rumput, maka bola yang menggelinding tersebut mengalami perlambatan sebesar 2 m /dtk². Tentukan berapa jarak tempuh bola tersebut dan pada waktu berapa lama bola tersebut akan berhenti?

Penyelesaian

Dibagian awal pembahasan sudah dinyatakan bahwa persamaan untuk percepatan adalah $a = f''(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$. Karena di soal di ketahui bola menggelinding mengalami perlambatan, maka:

$$a = \frac{dv}{dt} = -2$$

$$dv = -2 dt$$

$$\int dv = \int -2dt$$

$$v = -2t + c$$

Karena kecepatan awal bola adalah $v = 15$ m/dtk, maka $t = 0$, jadi

$$10 = -2(0) + c$$

$c = 10$, substitusikan nilai c tersebut ke persamaan:

$$v = -2t + 10$$

$$v = \frac{ds}{dt} = -2t + 10$$

$$ds = (-2t + 10)dt$$

$$\int ds = \int (-2t + 10)dt$$

$$s = -t^2 + 10t + c$$

Jika $t = 0$, maka $s = 0$, sehingga $c = 0$, jadi

$$s = -t^2 + 10t + 0$$

$$s = -t^2 + 10t$$

Karena bola mengalami perlambatan, maka bola akan berhenti dengan kecepatan benda $v = 0$, jadi

$$0 = -2t + 10; t = 5 \text{ dtk.}$$

Bola akan berhenti, pada waktu 5 detik, dengan jarak tempuh yaitu:

$$s = (-5)^2 + 10(5)$$

$$s = 75 \text{ m}$$

RANGKUMAN

1. Integral tak tentu dapat digunakan dalam penyelesaian persamaan differensial yang peubahnya dapat dipisah dan persamaan differensial linier tingkat satu. Bentuk $\frac{dy}{dx} = 2x$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$ dan $\frac{dy}{dx} + 2xy = x$ merupakan persamaan differensial, yang solusinya dapat dicari dengan menggunakan integral tak tentu
2. Integral tak tentu dapat digunakan dalam menentukan persamaan kurva jika diketahui koefisien arah/gradient $(\frac{dy}{dx})$ dan sebuah titik, misalkan $Q(x,y)$ yang melalui kurva tersebut.
3. Sebuah benda bergerak lurus dari satu titik menuju ke suatu titik akan memiliki jarak yang dinyatakan dengan s dan waktu tempuh t , maka kecepatan benda tersebut dapat kita tentukan dengan menggunakan konsep integral tak tentu.

LATIHAN

1. Faqih memperhatikan sebuah benda yang bergerak melintas di sepanjang jalan rumahnya. Benda tersebut bergerak dengan kecepatan yang dinyatakan sebagai $(5t^2 + 4t)$ m /dtk. Jika waktu tempuh benda tersebut adalah 15 detik, berapakah jarak yang telah ditempuh benda tersebut?
2. Dinyatakan bahwa penyelesaian dari sebuah persamaan differensial $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 8x - 5$ adalah $y = x^3 + 4x - 7x + c$. Tentukan apakah penyelesaian dari persamaan differensial tersebut sudah benar?
 - Jika belum, nyatakan bagian mana yang masih salah dan sajikan jawaban yang benarnya!
 - Jika sudah, coba tunjukkan proses untuk mencari selesaian persamaan differensial tersebut!
3. Dinyatakan bahwa selesaian dari persamaan differensial $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 4x$; $\frac{dy}{dx} = 10$ dan $x = 1$ adalah $y = x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 8x + c$. Nyatakan proses untuk menemukan selesaian dari persamaan differensial tersebut!
4. Sebuah benda dilemparkan vertical ke atas dari permukaan tanah dengan kecepatan awal 108 m/dtk. Jika gerak benda hanya dipengaruhi oleh gravitasi:
 - a. Tentukan waktu yang diperlukan benda untuk sampai ke tanah
 - b. Kecepatan benda pada saat mencapai tanah

5. Faqih sedang melakukan research terkait perkembanganbiakan bakteri. Jika diketahui pertumbuhan bakteri dari hasil pengamatan yang Faqih lakukan dinyatakan dengan $\frac{dN}{dt} = 0,25 N$. Apabila pada kondisi awal $N = 400$, coba tentukan berapa banyak bakteri dalam waktu 35 dtk?

BAB 5

TEOREMA DASAR INTEGRAL TENTU

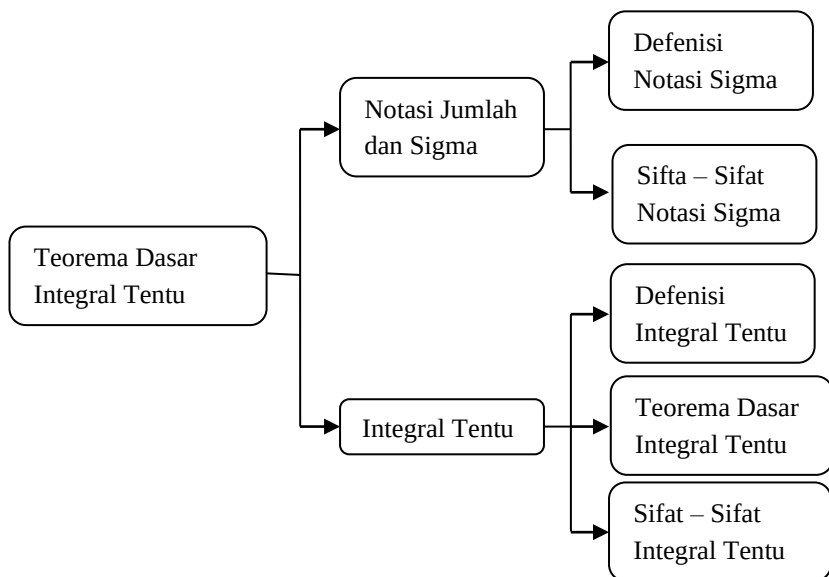
Pada Bab ini akan dibahas tentang teorema dasar integral tentu yang di susun dalam beberapa sub – bab materi. Materi yang disajikan pada Bab 5 terkait dengan notasi jumlah dan sigma, dan integral tak tentu. Selain itu, untuk menambah pemahaman mahasiswa, dalam Bab ini juga disajikan beberapa contoh soal beserta penyelesaiannya, kemudian dilengkapi juga dengan rangkuman serta latihan.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari dan mentelaah materi yang terdapat pada bab ini, mahasiswa di harapkan mampu:

1. Menganalisis definisi notasi sigma dan integral tentu dengan tepat.
2. Menggunakan sifat – sifat notasi sigma dalam penyelesaian masalah yang berkaitan dengan integral tentu.
3. Menggunakan teorema dasar integral tentu dalam penyelesaian masalah yang berkaitan dengan integral tentu.

PETA KONSEP



5.1 Notasi Jumlah dan Sigma

Sebelum mempelajari materi tentang integral tentu, maka terlebih dahulu harus memahami konsep dasar tentang notasi jumlah dan sigma. Hal ini dikarenakan, pondasi awal dari terbentuknya integral tentu, adalah dengan menggunakan konsep notasi jumlah dan sigma serta limit. Dalam bahan ajar ini, tidak akan disinggung tentang konsep limit, karena sudah kita pelajari pada pertemuan di kalkulus 1 (kalkulus differensial).

5.1.1 Defenisi Notasi Sigma

Notasi sigma adalah sebuah konsep penulisan dalam matematika yang digunakan untuk menyatakan jumlah terhingga. Perhatikan jumlah dari bentuk berikut ini:

- a. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 100^3$
- b. $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

Bentuk jumlah dari a dan b di atas, dalam matematika bisa dinyatakan dalam suatu bentuk yang lebih kompak yaitu:

- a. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 100^3 = \sum_{i=1}^{100} i^3$
- b. $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$

Dengan cara yang sama, coba kamu nyatakan jumlah dari bentuk di atas menjadi suatu bentuk yang lebih kompak:

- a. $1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + 50^5 = \dots$
- b. $b^1 + b^2 + b^3 + \dots + b^n = \dots$
- c. $f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n) = \dots$
- d. $\sum_{k=1}^6 (5k - 1) = \dots$
- e. $\sum_{i=3}^5 5i^3 = \dots$

Selanjutnya perhatikan beberapa bentuk penulisan dalam persoalan yang dinyatakan di atas, di sana kita akan menemukan bentuk atau simbol Σ . Simbol Σ merupakan huruf besar sigma yunani yang berpadanan dengan S. Simbol ini memiliki arti bahwa menjumlahkan (menambahkan) semua bilangan dengan model yang terbentuk dimulai dengan bilangan yang berada di bawah tanda Σ dan berakhir dengan bilangan yang berada di atas tanda Σ . Dengan menggunakan penjelasan arti dari simbol Σ , maka persoalan di bahwa ini dapat dinyatakan sebagai:

a. $\sum_{i=2}^6 b_i = b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6$

b. $\sum_{k=1}^3 \frac{k^3}{k+1} = \frac{1^3}{1+1} + \frac{2^3}{2+1} + \frac{3^3}{3+1}$

Dengan cara yang sama, coba nyatakan nilai dari jumlahan yang dinyatakan dalam bentuk berikut ini:

a. $\sum_{k=1}^6 (5k - 1) = \dots\dots\dots$

b. $\sum_{i=3}^5 5i^3 = \dots\dots\dots$

5.1.2 Sifat – Sifat Notasi Sigma

Jika notasi Sigma (Σ) di anggap sebagai sebuah operator, maka Σ beroperasi pada barisan dan akan memiliki beberapa sifat, diantaranya yaitu:

Andaikan (a_i) dan (b_i) merupakan dua barisan dan c suatu konstanta, maka akan berlaku sifat – sifat berikut:

a. $\sum_{i=1}^n c = nc$

b. $\sum_{i=1}^n ca_i = c \sum_{i=1}^n a_i$

c. $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$

d. $\sum_{i=1}^n (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i$

Perhatikan penggunaan sifat – sifat notasi sigma dalam penyelesaian persoalan dalam contoh di bawah ini:

Contoh Soal

- a. Tentukan nilai dari $\sum_{i=1}^5 2$ dan $\sum_{i=1}^{100} (5)$
 b. Andaikan $\sum_{i=1}^{100} a_i = 65$ dan $\sum_{i=1}^{100} b_i = 25$, maka hitunglah $\sum_{i=1}^{100} (5a_i - 3b_i + 7)$

Penyelesaian dari persoalan di atas adalah sebagai berikut:

- a. Untuk menentukan nilai dari bentuk $\sum_{i=1}^5 2$ dan $\sum_{i=1}^{100} (5)$ adalah dengan menggunakan sifat $\sum_{i=1}^n c = nc$. Karena bentuk $\sum_{i=1}^5 2$ dan $\sum_{i=1}^{100} (5)$ memiliki kemiripan dengan bentuk $\sum_{i=1}^n c$, sehingga:

$$\sum_{i=1}^5 2 = 5(2) = 10 \text{ dan } \sum_{i=1}^{100} (5) = 100(5) = 500$$

- b. Untuk menyelesaikan persoalan hitung $\sum_{i=1}^{100} (5a_i - 3b_i + 7)$, maka kita dapat menggunakan sifat – sifat notasi sigma poin b, c, dan d sekaligus. Bentuk $\sum_{i=1}^{100} (5a_i - 3b_i + 7)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{100} (5a_i - 3b_i + 7) &= \sum_{i=1}^{100} 5a_i - \sum_{i=1}^{100} 3b_i + \sum_{i=1}^{100} 7 \\ &= 5 \sum_{i=1}^{100} a_i - 3 \sum_{i=1}^{100} b_i + \sum_{i=1}^{100} 7 \\ &= 5(65) - 3(25) + 100(7) \\ &= 325 - 75 + 700 \\ &= 950 \end{aligned}$$

Selain memiliki sifat – sifat seperti yang dinyatakan di atas, notasi sigma juga memiliki beberapa jumlah khusus, diantaranya yaitu:

- a. $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \cdots \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- b. $\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots \dots + n^2 = \frac{n((n+1)(2n+1))}{6}$
- c. $\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$
- d. $\sum_{i=1}^n i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

Untuk pembuktian dari jumlah khusus di atas, silakan lakukan secara mandiri. Selanjutnya dapatkah kamu memberikan alasan, mengapa jumlahan khusus dari notasi sigma hanya sampai di $\sum_{i=1}^n i^4$? Dapatkah kamu menentukan berapakah jumlahan khusus dari $\sum_{i=1}^n i^5$?.

Berikut akan ditampilkan penggunaan jumlahan khusus dari notasi sigma dalam penyelesaian beberapa persoalan, diantaranya yaitu:

Hitunglah:

- a. $\sum_{i=1}^5 i$
- b. $\sum_{i=1}^5 i^4$
- c. $\sum_{i=1}^5 2i(i^2 - 3)$

Penyelesaian dari persoalan jumlah khusus notasi sigma di atas adalah sebagai berikut:

- a. Untuk dapat menghitung $\sum_{i=1}^5 i$, maka gunakan aturan jumlah khusus notasi sigma yang berbentuk $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 +$

$\cdots \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ karena bentuk $\sum_{i=1}^5 i$ memiliki kemiripan dengan bentuk jumlah khusus notasi sigma yang berbentuk $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \cdots \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, sehingga penyelesaiannya adalah:

$$\sum_{i=1}^5 i = \frac{5(5+1)}{2} = 13$$

- b. Untuk dapat menghitung $\sum_{i=1}^5 i^4$, maka gunakan aturan jumlah khusus notasi sigma yang berbentuk $\sum_{i=1}^n i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$, karena bentuk $\sum_{i=1}^5 i^4$ memiliki kemiripan dengan bentuk jumlah khusus notasi sigma $\sum_{i=1}^n i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$, sehingga penyelesaiannya adalah:

$$\sum_{i=1}^5 i^4 = \frac{5(5+1)[6(5^2) + 9(5^2) + 5 - 1]}{30} = 328.467$$

- d. Untuk dapat menghitung $\sum_{i=1}^5 2i(i^2 - 3)$, maka gunakan aturan jumlah khusus notasi sigma $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \cdots \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ dan $\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$. Hal ini dikarenakan bentuk dari $\sum_{i=1}^5 2i(i^2 - 3)$ dapat dinyatakan sebagai $\sum_{i=1}^5 2i^3$ dan $\sum_{i=1}^5 6i$, sehingga penyelesaiannya adalah:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 2i(i^2 - 3) &= \sum_{i=1}^5 2i^3 - \sum_{i=1}^5 6i \\ &= 2 \sum_{i=1}^5 i^3 - 6 \sum_{i=1}^5 i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \left[\frac{5(5+1)}{2} \right]^2 - 5 \frac{5(5+1)}{2} \\ &= 2 (169) - 5(13) \\ &= 273 \end{aligned}$$

RANGKUMAN

Notasi sigma merupakan sebuah konsep penulisan dalam matematika yang digunakan untuk menyatakan jumlah terhitung.

Notasi sigma memiliki beberapa sifat diantaranya yaitu:

Andaikan (a_i) dan (b_i) merupakan dua barisan dan c suatu konstanta, maka akan berlaku sifat – sifat berikut:

$$a. \sum_{i=1}^n c = nc$$

$$b. \sum_{i=1}^n ca_i = c \sum_{i=1}^n a_i$$

$$c. \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

$$d. \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i$$

Selain memiliki sifat – sifat seperti yang dinyatakan di atas, notasi sigma juga memiliki beberapa jumlah khusus, diantaranya yaitu:

$$e. \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \cdots \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$f. \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots \dots + n^2 = \frac{n((n+1)(2n+1))}{6}$$

$$g. \sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$h. \sum_{i=1}^n i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$$

LATIHAN

1. Tuliskan jumlah yang ditunjukkan dibawah ini dalam bentuk penulisan sigma!

- a. $1 + 2 + 3 + \dots + 100$
- b. $2 + 4 + 6 + \dots + 100$
- c. $3 + 5 + 7 + \dots + 100$
- d. $f(c_1) + f(c_2) + \dots + f(c_n)$
- e. $f(w_1) \Delta x + f(w_2) \Delta x + \dots + f(w_n) \Delta x$

2. Hitunglah nilai dari jumlah di bawah ini!

- a. $\sum_{k=1}^5 (3k - 1)$
- b. $\sum_{i=1}^5 \frac{2}{i+1}$
- c. $\sum_{i=1}^5 (-1)^i 2^{i-1}$
- d. $\sum_{k=1}^5 k \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$
- e. $\sum_{k=1}^5 \frac{(-1)^k}{k(2K+1)}$

3. Andaikan bahwa $\sum_{i=1}^{10} a_i = 40$ dan $\sum_{i=1}^{10} b_i = 50$, maka hitunglah:

- a. $\sum_{i=1}^{10} (2a_i + b_i)$
- b. $\sum_{i=1}^{10} (4a_i - b_i + 2)$
- c. $\sum_{i=1}^{10} (5a_i + 3b_i + 7)$
- d. $\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{3}{7}a_i - \frac{5}{11}b_i + \frac{7}{13}\right)$
- e. $\sum_{i=1}^{10} (10,5a_i + 10,5b_i + 5)$

4. Tentukan nilai dari masing-masing jumlah berikut ini!

- a. $\sum_{i=1}^{100} (3i - 2)$

b. $\sum_{i=1}^{10} [(i + 2)(4i - 3)]$

c. $\sum_{k=1}^{10} 5k^2(k + 4)$

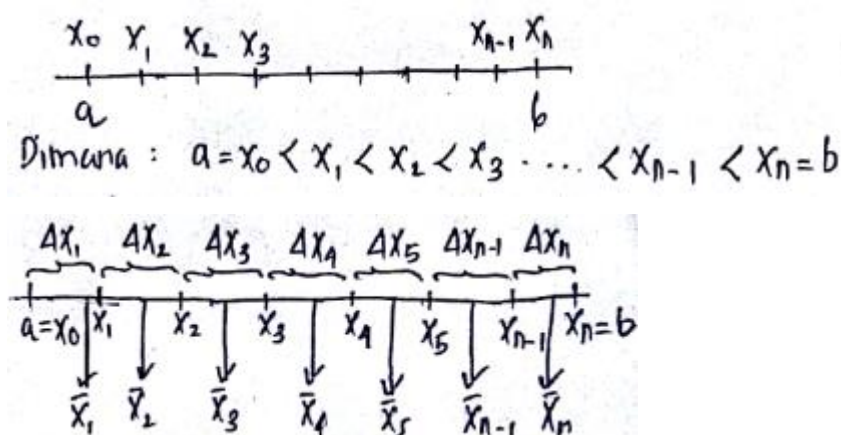
d. $\sum_{k=1}^n (2k^2 - 3k + 1)$

e. $\sum_{k=1}^n \left(\frac{5}{7}i - 3\right)^2$

5.2 Integral Tentu

5.2.1 Defenisi Integral Tentu

Gagasan pertama dalam perumusan defenisi integral tentu adalah dipedomani oleh jumlahan Reimann. Untuk memahami konsep jumlahan Reimann tersebut, perhatikan ilustrasi di bawah ini:



Andaikan daerah R adalah bidang yang di batasi oleh sumbu x , garis $x = a$, $x = b$ dan dibawah kurva $y = f(x)$, dimana f adalah suatu fungsi yang didefenisikan pada selang tertutup $[a,b]$. Jika kita diminta untuk menentukan luas bidang tersebut, maka ada beberapa tahapan yang bisa kita lakukan dalam menghitung integral tentu atau jumlahan Reimann, yaitu:

a. Bagi atau partisi interval $[a,b]$ menjadi n bagian

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_4, x_5], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

b. Tentukan Δx

Karena interval $[a,b]$ dibagi atau dipartisi menjadi beberapa bagian yang sama besar, maka Δx dapat ditentukan dengan aturan:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \text{ dimana } x_i = a + i\Delta x$$

- c. Carilah rumus untuk x_i dan $f(x_i)$
- d. Dengan hasil pada poin c, hitunglah jumlahan Reimann dengan aturan

$$R_p = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \dots + f(x_n)\Delta x_n$$

- e. Hitung integral tentu dengan mengambil limitnya untuk n menuju tak hingga yaitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

Limit tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk $\int_a^b f(x)dx$, dan ini dinamakan sebagai integral tentu untuk f dari a sampai b .

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

Dari paparan di atas dapat dinyatakan bahwa:

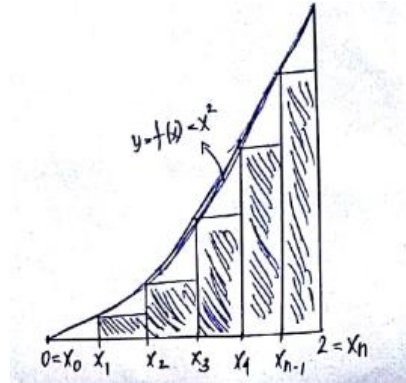
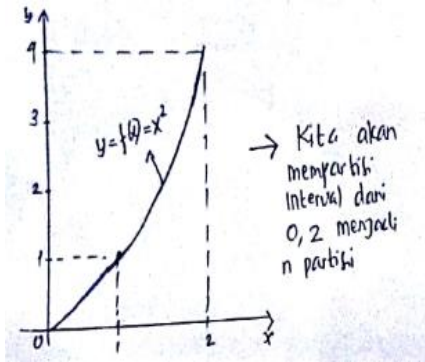
Jika $y = f(x)$ adalah fungsi kontinu dan terdefinisi dalam interval tertutup $[a,b]$ sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$ ada (mempunyai nilai), maka integral tentu $f(x)$ terhadap x , dari $x = a$ sampai $x = b$ dapat dinyatakan sebagai $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$

Contoh Soal

Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x) = x^2$, sumbu x , $x = 2$.

Penyelesaian

1. Proses membagi interval $[0,2]$ menjadi beberapa partisi



2. Menentukan terlebih dahulu nilai dari Δx

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{2 - 0}{n}, \text{ ingat intervalnya adalah } [0, 2]$$

$$\Delta x = \frac{2}{n}, x_i = a + i\Delta x$$

3. Menentukan nilai x_i sehingga akan mendapatkan $f(x_i) \cdot \Delta x_i$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n, \text{ ingat } a = 0, \Delta x = \frac{2}{n}$$

$$x_0 = 0 + \frac{2}{n}(0) = 0$$

$$x_1 = 0 + \frac{2}{n}(1) = \frac{2}{n}$$

$$x_2 = 0 + \frac{2}{n}(2) = \frac{4}{n}$$

$$x_i = 0 + \frac{2}{n}(i) = \frac{2}{n}i$$

$$x_n = 0 + \frac{2}{n}(n) = 2$$

Ingat $f(x) = x^2$; untuk $f(x_i)$ akan diperoleh:

$$f(x_i) = \left(\frac{2}{n}i\right)^2 = \frac{4}{n^2}i^2$$

4. Menentukan jumlah dari semua partisi

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{4}{n^2}i^2\right) \left(\frac{2}{n}\right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{8}{n^3}i^2\right) \right] \\ &= \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2\end{aligned}$$

Ingat pada materi sebelumnya, kita telah mengetahui bahwa

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n((n+1)(2n+1))}{6}$$

Jadi:

$$\begin{aligned}&= \frac{8}{n^3} \left[\frac{n((n+1)(2n+1))}{6} \right] \\ &= \frac{8}{n^3} \left[\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \right] \\ &= \frac{8}{6} \left[\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} \right] \\ &= \frac{8}{6} \left[2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right] \\ &= \frac{8}{3} + \frac{8}{2n} + \frac{8}{6n^2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{8}{3} + \frac{8}{2n} + \frac{8}{6n^2} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{3} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{2n} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{6n^2} \right) \\ &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x) = x^2$, sumbu x , $x = 2$ adalah $\frac{8}{3}$ satuan luas

atau bisa juga kita nyatakan bahwa $\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$

5.2.2 Teorema Dasar Integral Tentu

Pada bagian definisi atau pengertian integral tentu, telah dinyatakan bahwa Jika $y = f(x)$ adalah fungsi kontinu dan terdefinisi dalam interval tertutup $[a,b]$ sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$ ada (mempunyai nilai), maka integral tentu $f(x)$ terhadap x , dari $x = a$ sampai $x = b$ dapat dinyatakan sebagai $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$.

Apabila kita diminta untuk menghitung nilai integral tentu dengan menggunakan definisi tersebut, tentukan kurang praktis dan membutuhkan waktu dan ketelitian yang lebih, bahkan terkadang sulit dan bahkan menjemukan. Oleh sebab itu, untuk menghitung nilai integral dapat menggunakan teorema dasar integral tentu sebagai berikut:

Andaikan f kontinu pada $[a,b]$ dan andaikan F sebarang anti turunan dari f , maka

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Bukti

Andaikan $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ adalah partisi sembarang dari interval $[a,b]$.

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \\ &\dots + F(x_1) - F(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] \end{aligned}$$

Menurut Teorema Nilai Rata – Rata untuk Turunan yang diterapkan di F pada selang $[x_{i-1}, x_i]$

$$\begin{aligned} F(x_i) - F(x_{i-1}) &= F'(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= f(\bar{x}_i)\Delta x_i \end{aligned}$$

Untuk suatu pilihan $\bar{x}_i$ dalam selang terbuka (x_{i-1}, x_i) , jadi:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

Pada ruas kanan kita mempunyai jumlah Reimann untuk f pada $[a, b]$. bila kedua ruas diambil limitnya pada $|P| \rightarrow 0$, akan kita peroleh:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Untuk lebih memahaminya penggunaan dari teorema ini, perhatikan contoh berikut:

Contoh Soal

1. Hitunglah $\int_1^3 (x^3 + 2x^2 - 5x + 3)dx$

Penyelesaian

Untuk menghitung nilai integral tersebut, maka langkah awalnya kita harus menentukan terlebih dahulu integral dari $f(x) = (x^3 + 2x^2 - 5x + 3)$. Untuk menghitung nilai integral dari

fungsi tersebut, silakan gunakan aturan integral tak tentu yang telah kita pelajari pada bab sebelumnya.

$$\int (x^3 + 2x^2 - 5x + 3)dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x$$

Dengan menggunakan teorema dasar integral tentu, maka dapat dinyatakan bahwa:

$$\begin{aligned}\int_1^3 (x^3 + 2x^2 - 5x + 3)dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x \right]_1^3 \\&= \left[\frac{1}{4}(3)^4 + \frac{2}{3}(3)^3 - \frac{5}{2}(3)^2 + 3(3) \right] - \left[\frac{1}{4}(1)^4 + \frac{2}{3}(1)^3 - \frac{5}{2}(1)^2 + 3(1) \right] \\&= \left[\frac{1}{4}(81) + \frac{2}{3}(27) - \frac{5}{2}(9) + 9 \right] - \left[\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 3 \right] \\&= \left[\frac{243-270+216+108}{12} \right] - \left[\frac{3+8-30+36}{12} \right] \\&= \left[\frac{243-270+216+108}{12} \right] - \left[\frac{3+8-30+36}{12} \right] \\&= \left[\frac{297}{12} \right] - \left[\frac{17}{12} \right] \\&= \frac{280}{12}\end{aligned}$$

2. Hitunglah $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan perhitungan integral tersebut, terlebih dahulu kita selesaikan hitung $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$. Untuk dapat menyelesaikan hitung integral $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$, kita dapat menggunakan teknik integrasi dengan metode substitusi yang telah kita pelajari pada bab sebelumnya.

Misalkan: $u = x+1$, maka $du = dx$

$$x = u-1$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \int \frac{u-1}{\sqrt{u}} du \\ &= \int (u-1) \left(u^{-\frac{1}{2}}\right) du \\ &= \int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\right) du \\ &= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + c\end{aligned}$$

Substitusikan kembali $u = x+1$ ke $\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + c$, sehingga:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + c$$

Penyelesaian hitung integral $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ dengan menggunakan teorema dasar kalkulus akan menjadi:

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} \right]_0^3 \\ &= \left[\frac{2}{3}(3+1)^{\frac{3}{2}} - 2(3+1)^{\frac{1}{2}} \right] - \left[\frac{2}{3}(0+1)^{\frac{3}{2}} - 2(0+1)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= \left[\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - 2(4)^{\frac{1}{2}} \right] - \left[\frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}} - 2(1)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= \left[\frac{2}{3}(2)^3 - 2(2) \right] - \left[\frac{2}{3} - 2 \right] \\ &= \frac{14}{3} - 2 \\ &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

Selain teorema yang di atas, terdapat teorema lain yang dianggap penting, yaitu:

Misalkan fungsi f kontinu pada interval tertutup $[a,b]$ dan misalkan x sembarang titik dalam $[a,b]$. Jika F fungsi yang didefinisikan oleh oleh:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \text{ maka } D_x \left[\int_a^x f(t)dt \right] = f(x)$$

Untuk dapat memahami penggunaan dari konsep teorema integral ini, coba perhatikan contoh di bawah ini:

1. Hitunglah $D_x \left[\int_1^x (t^2 + t)dt \right]$

Penyelesaian

Hitung integral di atas dapat diselesaikan dengan dua cara, yaitu:

Cara pertama

$$\begin{aligned} \int_1^x (t^2 + t)dt &= \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \right]_1^x \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right] - \left[\frac{1}{3}(1)^3 + \frac{1}{2}(1)^2 \right] \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Dengan demikian:

$$D_x \left[\int_1^x (t^2 + t)dt \right] = D_x \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6} \right] = x^2 + x$$

Cara kedua dengan menggunakan aturan teorema

$$D_x \left[\int_1^x (t^2 + t)dt \right] = x^2 + x$$

2. Hitunglah $D_x \left[\int_1^{x^2} (t^3 - 2t)dt \right]$

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan hitung integral ini, terlebih dahulu kita harus memisalkan x^2 , hal ini disebabkan diteorema di sajikan x , bukan x^2 .

Misalkan: $u = x^2$, maka $\int_1^u (t^3 - 2t) dt$

Dengan menggunakan cara yang sama dengan contoh di atas, maka akan dihasilkan:

$$\begin{aligned}\int_1^u (t^3 - 2t) dt &= \left[\frac{1}{4} t^4 + t^2 \right]_1^u \\ &= \left[\frac{1}{4} (u)^4 + (u)^2 \right] - \left[\frac{1}{4} (1)^4 + (1)^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} u^4 + u^2 - \frac{5}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_x \left[\int_1^{x^2} (t^3 - 2t) dt \right] &= D_u \left[\int_1^u (t^3 - 2t) dt \right] \\ &= D_u \left[\frac{1}{4} u^4 + u^2 - \frac{5}{4} \right] \\ &= u^3 + 2u\end{aligned}$$

Substitusikan $u = x^2$ ke $u^3 + 2u$, sehingga:

$$\begin{aligned}D_x \left[\int_1^{x^2} (t^3 - 2t) dt \right] &= (x^2)^3 - 2(x^2) \\ &= x^6 - 2x^2\end{aligned}$$

5.2.3 Sifat – Sifat Integral Tentu

Integral tak tentu memiliki beberapa sifat yang dapat digunakan untuk mempermudah dalam penyelesaian hitung integral tak tentu. Hal ini juga berlaku pada integral tentu. Integral tentu

juga memiliki beberapa sifat yang pada dasarnya dapat digunakan untuk membantu mempermudah penyelesaian perhitungan integral tentu. Berikut ada beberapa sifat dari integral tentu.

1. Kelinearan Integral Tentu

Andaikan f dan g merupakan dua buah fungsi yang diintegrasikan pada interval $[a,b]$ dan k adalah konstanta, maka:

a. $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$

b. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

c. $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

d. $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx, a > b$

2. Sifat Penambahan Selang

Jika fungsi f diintegrasikan pada suatu selang yang mengandung tiga titik, misalkan a, b , dan c , maka:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

3. Sifat Perbandingan

Jika fungsi f dan g diintegrasikan pada selang $[a,b]$ dan jika $f(x) < g(x)$ untuk semua x dalam selang $[a,b]$, maka:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

4. Sifat Kesimetrisan

Jika fungsi f merupakan fungsi genap (ingat pembelajaran pada kalkulus differensial terkait jenis-jenis fungsi), maka:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

Sebaliknya jika fungsi f merupakan fungsi ganjil, maka:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Berikut ini akan disajikan beberapa contoh terkait penggunaan sifat – sifat integral tentu dalam penyelesaian masalah hitung integral.

Contoh Soal

Andaikan $\int_0^1 f(x) dx = 5$, $\int_1^2 f(x) dx = 7$, $\int_0^1 g(x) dx = -1$ dan $\int_0^2 g(x) dx = 3$

Tentukan:

- $\int_0^2 f(x) dx$
- $\int_0^2 [f(x) + 2 g(x)] dx$
- $\int_1^1 g(x) dx$
- $\int_0^1 [5f(x) + 3g(x)] dx$
- $\int_0^2 [\sqrt{5}f(x) - \sqrt{3}g(x) + \pi] dx$

Penyelesaian

- $\int_0^2 f(x) dx$

Untuk dapat menyelesaikan hitung integral tentu ini, ada beberapa tahapan yang harus kita lakukan:

- Identifikasi apakah permasalahan hitung integral yang diberikan memenuhi salah satu pengandaian yang telah diberikan di awal

Respon

Permasalahan hitung integral yang disajikan, tidak memenuhi pengandaian yang diberikan, di soal disajikan $\int_0^2 f(x)dx$, sedangkan pengandaian yang disajikan adalah $\int_0^1 f(x)dx = 5$, $\int_1^2 f(x)dx = 7$,

- Identifikasi sifat – sifat integral tentu manakah yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan hitung integral tersebut.

Respon

Salah satu sifat integral tentu yaitu sifat penambahan selang, dimana:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Sifat ini bisa kita gunakan untuk menyelesaikan hitung integral

$\int_0^2 f(x)dx$. Mengapa sifat integral tentu penambahan selang ini dapat kita gunakan, karena yang kita ketahui dari pengandaian di soal adalah $\int_0^1 f(x)dx = 5$, $\int_1^2 f(x)dx = 7$,

- Lakukan proses selesaian dengan menggunakan sifat integral tentu tersebut.

Respon

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx &= \int_0^1 f(x) + \int_1^2 f(x) \\ &= (5) + (7) \\ &= 12.\end{aligned}$$

- Nyatakan kesimpulan

Respon

$$\int_0^2 f(x)dx = 12$$

b. $\int_0^2 [f(x) + 2 g(x)]dx$

Untuk dapat menyelesaikan hitung integral tentu ini, ada beberapa tahapan yang harus kita lakukan:

- Identifikasi apakah permasalahan hitung integral yang diberikan memenuhi salah satu pengandaian yang telah diberikan di awal

Respon

Permasalahan hitung integral yang disajikan, tidak memenuhi pengandaian yang diberikan, di soal disajikan $\int_0^2 [f(x) + 2 g(x)]dx$, sedangkan pengandaian yang disajikan adalah $\int_0^1 f(x)dx = 5, \int_1^2 f(x)dx = 7, \int_0^1 g(x)dx = -1$ dan $\int_0^2 g(c)dx = 3$

- Identifikasi sifat – sifat integral tentu manakah yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan hitung integral tersebut.

Respon

Sifat integral tentu yaitu sifat penambahan selang, dimana:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \text{dan}$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

Sifat ini bisa kita gunakan untuk menyelesaikan hitung integral

$\int_0^2 [f(x) + 2g(x)]dx$. Mengapa sifat integral tentu penambahan selang ini dapat kita gunakan, karena yang kita ketahui dari pengandaian di soal adalah $\int_0^1 f(x)dx = 5$, $\int_1^2 f(x)dx = 7$, $\int_0^1 g(x)dx = -1$ dan $\int_0^2 g(x)dx = 3$

- Lakukan proses selesaian dengan menggunakan sifat integral tentu tersebut.

Respon

$$\int_0^2 [f(x) + 2g(x)]dx = \int_0^2 f(x) + \int_0^2 2g(x)$$

Ingat pada soal nomor a, kita telah menyatakan bahwa

$\int_0^2 f(x)dx = 12$, jadi tinggal kita substitusikan

$$\begin{aligned} \int_0^2 [f(x) + 2g(x)]dx &= \int_0^2 f(x) + \int_0^2 2g(x) \\ &= 12 + 2 \int_0^2 g(x) \\ &= 12 + 3 \\ &= 15 \end{aligned}$$

- Nyatakan kesimpulan

Respon

$$\int_0^2 [f(x) + 2 g(x)]dx = 15$$

c. $\int_1^1 g(x)dx$

Untuk dapat menyelesaikan hitung integral tentu ini, ada beberapa tahapan yang harus kita lakukan:

- Identifikasi apakah permasalahan hitung integral yang diberikan memenuhi salah satu pengandaian yang telah diberikan di awal

Respon

Permasalahan hitung integral yang disajikan, tidak memenuhi pengandaian yang diberikan, di soal disajikan $\int_1^1 g(x)dx$, sedangkan pengandaian yang disajikan adalah $\int_0^1 f(x)dx = 5$, $\int_1^2 f(x)dx = 7$, $\int_0^1 g(x)dx = -1$ dan $\int_0^2 g(c)dx = 3$

- Identifikasi sifat – sifat integral tentu manakah yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan hitung integral tersebut.

Respon

Sifat integral tentu yaitu sifat penambahan selang, dimana:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Sifat ini bisa kita gunakan untuk menyelesaikan hitung integral

$\int_1^1 g(x)dx$. Mengapa sifat integral tentu penambahan selang ini dapat kita gunakan, karena yang kita ketahui dari

pengandaian di soal adalah $\int_0^1 f(x)dx = 5, \int_1^2 f(x)dx = 7, \int_0^1 g(x)dx = -1$ dan $\int_0^2 g(c)dx = 3$

- Lakukan proses penyelesaian dengan menggunakan sifat integral tentu tersebut.

Respon

$$\int_1^1 g(x)dx = 0$$

- Nyatakan kesimpulan

Respon

$$\int_1^1 g(x)dx = 0$$

d. $\int_0^1 [5f(x) + 3g(x)] dx$

Untuk dapat menyelesaikan hitung integral tentu ini, ada beberapa tahapan yang harus kita lakukan:

- Identifikasi apakah permasalahan hitung integral yang diberikan memenuhi salah satu pengandaian yang telah diberikan di awal

Respon

Permasalahan hitung integral yang disajikan, tidak memenuhi pengandaian yang diberikan, di soal disajikan $\int_0^1 [5f(x) + 3g(x)] dx$, sedangkan pengandaian yang disajikan adalah $\int_0^1 f(x)dx = 5, \int_1^2 f(x)dx = 7, \int_0^1 g(x)dx = -1$ dan $\int_0^2 g(c)dx = 3$

- Identifikasi sifat – sifat integral tentu manakah yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan hitung integral tersebut.

Respon

Sifat integral tentu yaitu sifat penambahan selang, dimana:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad \text{dan}$$

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

Sifat ini bisa kita gunakan untuk menyelesaikan hitung integral

$\int_0^1 [5f(x) + 3g(x)] dx$. Mengapa sifat integral tentu penambahan selang ini dapat kita gunakan, karena yang kita ketahui dari pengandaian di soal adalah $\int_0^1 f(x) dx = 5$, $\int_1^2 f(x) dx = 7$, $\int_0^1 g(x) dx = -1$ dan $\int_0^1 g(c) dx = 3$

- Lakukan proses selesaian dengan menggunakan sifat integral tentu tersebut.

Respon

$$\int_0^1 [5f(x) + 3g(x)] dx = 5 \int_0^1 f(x) + 3 \int_0^1 g(x)$$

Ingat pada soal nomor a, kita telah menyatakan bahwa $\int_0^1 f(x) dx = 5$, dan $\int_0^1 g(x) dx = -1$ jadi tinggal kita substitusikan

$$\begin{aligned} \int_0^1 [5f(x) + 3g(x)] dx &= 5 \int_0^1 f(x) + 3 \int_0^1 g(x) \\ &= 5(5) + 3(-1) \end{aligned}$$

$$= 25 - 3$$

$$= 22$$

- Nyatakan kesimpulan

Respon

$$\int_0^1 [5f(x) + 3g(x)] dx = 22$$

e. $\int_0^2 [\sqrt{5}f(x) - \sqrt{3}g(x) + \pi] dx$

Untuk dapat menyelesaikan hitung integral tentu ini, ada beberapa tahapan yang harus kita lakukan:

- Identifikasi apakah permasalahan hitung integral yang diberikan memenuhi salah satu pengandaian yang telah diberikan di awal

Respon

Permasalahan hitung integral yang disajikan, tidak memenuhi pengandaian yang diberikan, di soal disajikan $\int_0^2 [\sqrt{5}f(x) - \sqrt{3}g(x) + \pi] dx$, sedangkan pengandaian yang disajikan adalah $\int_0^1 f(x) dx = 5$, $\int_1^2 f(x) dx = 7$, $\int_0^1 g(x) dx = -1$ dan $\int_0^2 g(c) dx = 3$

- Identifikasi sifat – sifat integral tentu manakah yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan hitung integral tersebut.

Respon

Sifat integral tentu yaitu sifat penambahan selang, dimana:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \text{dan}$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

Sifat ini bisa kita gunakan untuk menyelesaikan hitung integral

$\int_0^2 [\sqrt{5}f(x) - \sqrt{3}g(x) + \pi]dx$. Mengapa sifat integral tentu penambahan selang ini dapat kita gunakan, karena yang kita ketahui dari pengandaian di soal adalah $\int_0^1 f(x)dx = 5$, $\int_1^2 f(x)dx = 7$, $\int_0^1 g(x)dx = -1$ dan $\int_0^2 g(x)dx = 3$

- Lakukan proses selesaian dengan menggunakan sifat integral tentu tersebut.

Respon

$$\begin{aligned} \int_0^2 [\sqrt{5}f(x) - \sqrt{3}g(x) + \pi]dx &= \sqrt{5} \int_0^2 f(x) - \sqrt{3} \int_0^2 g(x) + \int_0^2 \pi dx \\ &= \sqrt{5} \cdot (12) - \sqrt{3}(3) + 2\pi \\ &= 12\sqrt{5} - 3\sqrt{3} + 2\pi \end{aligned}$$

- Nyatakan kesimpulan

Respon

$$\int_0^2 [\sqrt{5}f(x) - \sqrt{3}g(x) + \pi]dx = 12\sqrt{5} - 3\sqrt{3} + 2\pi$$

RANGKUMAN

1. Beberapa tahapan yang bisa kita lakukan dalam menghitung integral tentu atau jumlahan Reimann, yaitu:

a. Bagi atau partisi interval $[a,b]$ menjadi n bagian

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_3, x_4], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

b. Tentukan Δx

Karena interval $[a,b]$ dibagi atau dipartisi menjadi beberapa bagian yang sama besar, maka Δx dapat ditentukan dengan aturan:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \text{ dimana } x_i = a + i\Delta x$$

c. Carilah rumus untuk x_i dan $f(x_i)$

d. Dengan hasil pada poin c, hitunglah jumlahan Reimann dengan aturan

$$R_p = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \dots + f(x_n)\Delta x_n$$

e. Hitung integral tentu dengan mengambil limitnya untuk n menuju tak hingga yaitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

Limit tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk $\int_a^b f(x)dx$, dan ini dinamakan sebagai integral tentu untuk f dari a sampai b .

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

2. Andaikan f kontinu pada $[a,b]$ dan andaikan F sebarang anti turunan dari f , maka

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

3. Misalkan fungsi f kontinu pada interval tertutup $[a,b]$ dan misalkan x sembarang titik dalam $[a,b]$. Jika F fungsi yang didefinisikan oleh oleh:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \text{ maka } D_x \left[\int_a^x f(t)dt \right] = f(x)$$

5. Kelinearan Integral Tentu

Andaikan f dan g merupakan dua buah fungsi yang diintegrasikan pada interval $[a,b]$ dan k adalah konstanta, maka:

e. $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$

f. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

g. $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

h. $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx, a > b$

6. Sifat Penambahan Selang

Jika fungsi f diintegrasikan pada suatu selang yang mengandung tiga titik, misalkan a, b , dan c , maka:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

7. Sifat Perbandingan

Jika fungsi f dan g diintegrasikan pada selang $[a, b]$ dan jika $f(x) < g(x)$ untuk semua x dalam selang $[a, b]$, maka:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

8. Sifat Kesimetrisan

Jika fungsi f merupakan fungsi genap (ingat pembelajaran pada kalkulus differensial terkait jenis-jenis fungsi), maka:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

Sebaliknya jika fungsi f merupakan fungsi ganjil, maka:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

LATIHAN

1. Selesaikan hitung integral berikut ini dengan menggunakan pendekatan definisi integral tentu.

a. $\int_1^3 (4x - x^2) dx$

b. $\int_{-2}^3 (x^3) dx$

2. Dinyatakan bahwa:

a. $\int_1^3 (x^3 + 3x - 7) dx = \frac{19}{3}$

b. $\int_1^4 \left(x^{\frac{5}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}} \right) dx = 18$

c. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{8}{5}$

Tentukan

a. Aturan integral apa yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan hitung integral di atas? Kemukakan alasan mu!

b. Gunakan aturan integral yang kamu nyatakan pada poin a di atas untuk menyelesaikan permasalahan hitung integral di atas!

c. Apakah selesaian yang kamu temukan sama dengan selesaian yang dinyatakan di atas?

- Jika ya, nyatakan selesaiannya!
 - Jika tidak, nyatakan perbedaannya dengan disertai alasan!
3. Tentukan apakah $D_x \left[\int_1^{x^3} (t^5 - 2t^2 + 3t) dt \right]$ dapat diselesaikan dengan menggunakan menggunakan teorema dasar kalkulus? kemukakan alasanmu dan kemudian tentukan selesainya!
4. Perhatikan selesaian dari hitung integral di bawah ini:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{5}}} x^2 \cos(x^3) dx &= \frac{1}{3} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{5}}} \cos u du \\ &= \left[\frac{1}{3} \sin u \right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{5}}} \\ &= \frac{1}{3} (1 - 0) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Tentukan:

- a. Aturan integral apakah yang digunakan dalam penyelesaian hitung integral di atas? Kemukakan alasan mu!
- b. Apakah aturan integral yang digunakan sudah benar?
 - Jika ya, nyatakan alasan mu!
 - Jika tidak, nyatakan alasan mu dan tulislah jawaban yang benarnya!.
- c. Apakah ada cara lain atau aturan integral lain yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan hitung integral di atas? Jika ada nyatakan selesainya permasalahan hitung integral di atas dengan cara tersebut dan nyatakan

cara mana yang lebih efektif dengan menyertakan alasan mu!

5. Andaikan $\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{5}, \int_1^2 f(x)dx = \frac{5}{7}, \int_0^1 g(x)dx = \sqrt{7}$ dan $\int_0^2 g(x)dx = 5\sqrt{13}$

Tentukan:

- $\int_0^2 f(x)dx$
- $\int_0^2 \left[f(x) + \frac{5}{8}g(x) \right] dx$
- $\int_1^2 7g(x)dx$
- $\int_0^1 [5f(x) + 3\pi g(x)] dx$
- $\int_0^2 [\sqrt{5}f(x) - \sqrt{3}g(x) + \pi] dx$

BAB 6

APLIKASI INTEGRAL TENTU

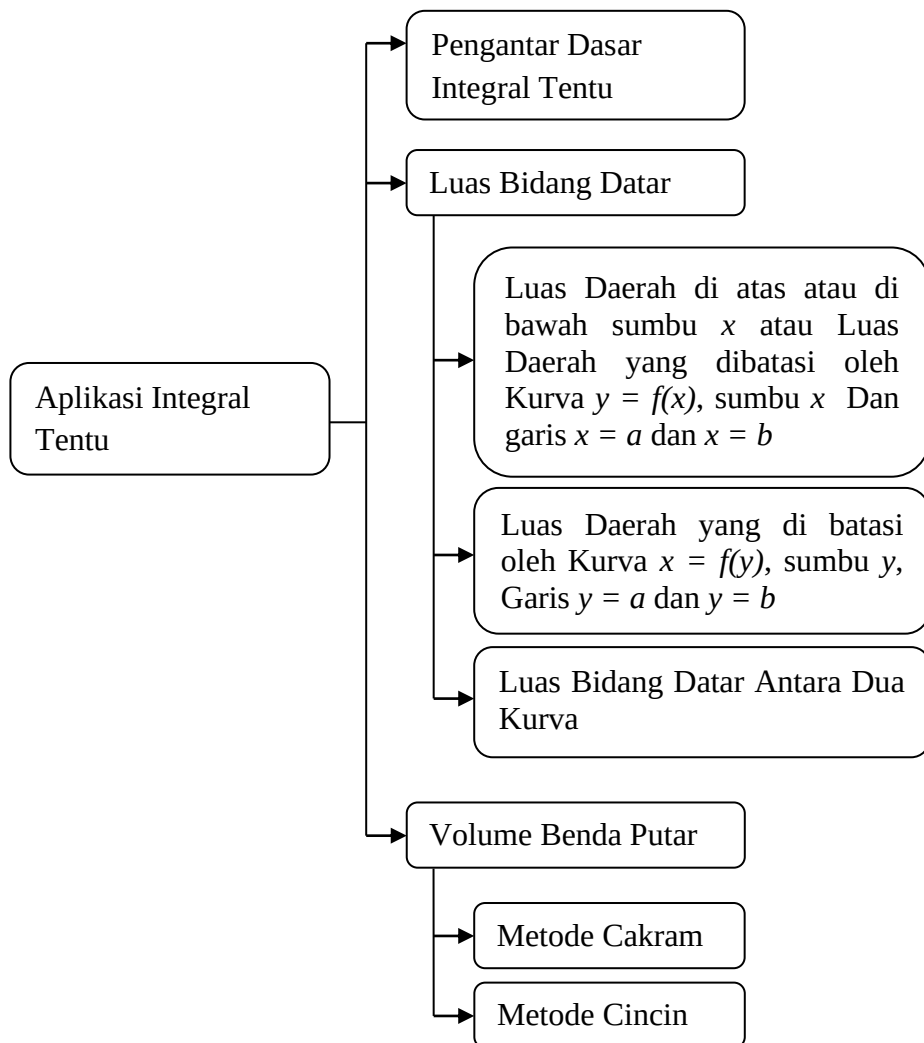
Pada Bab ini akan dibahas tentang penggunaan integral tentu yang di susun dalam beberapa sub – bab materi. Materi yang disajikan pada Bab 6 terkait dengan pengantar dasar aplikasi integral tentu, luas bidang datar . Selain itu, untuk menambah pemahaman mahasiswa, dalam Bab ini juga disajikan beberapa contoh soal beserta penyelesaiannya, kemudian dilengkapi juga dengan rangkuman serta latihan.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari dan mentelaah materi yang terdapat pada bab ini, mahasiswa di harapkan mampu:

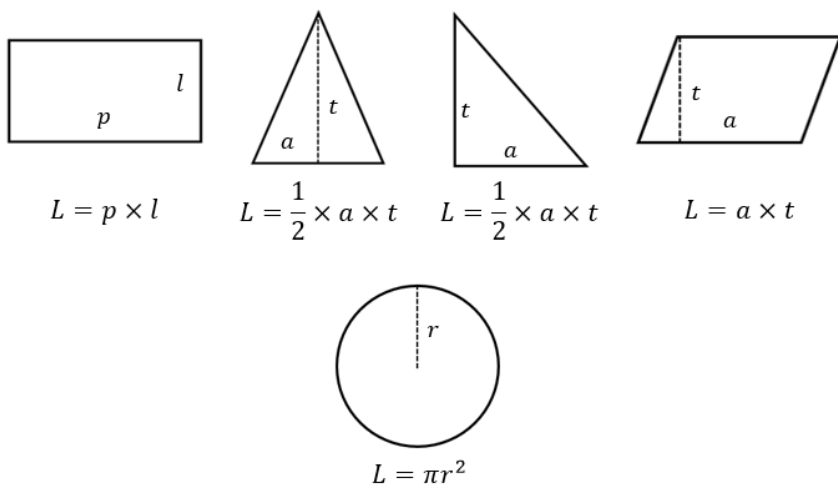
1. Menelaah pengantar dasar integral tentu melalui diskusi kelompok dengan benar
2. Menganalisis penerapan konsep integral tentu dalam menentukan luas bidang datar
3. Menganalisis penerapan konsep integral tentu dalam menentukan volume benda putar
4. Menggunakan konsep integral tentu dalam penyelesaian masalah

PETA KONSEP



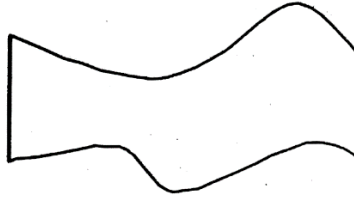
6.1 Pengantar Dasar Aplikasi Integral Tentu

Sebelumnya kita sudah memiliki pengetahuan bagaimana cara menghitung luas bidang. Hal ini tentunya sudah dipelajari pada jenjang pendidikan sebelumnya. Agar kita dapat mengingat kembali, pengetahuan apa yang telah kita miliki, mari kita amati beberapa gambar berikut ini.



Gambar 6.1

Pada gambar 6.1 di atas, jika kita diminta untuk menentukan luasnya, tentulah dengan sangat mudah kita dapat menentukan luasnya, jika ukuran dari beberapa sisinya sudah kita ketahui. Sebaliknya, jika kita diminta untuk menentukan luas dari gambar 6.2 seperti yang disajikan di bawah ini, apakah kita dapat dengan mudah untuk menentukan luasnya?



$$L = \dots$$

Gambar 6.2

Jelas gambar 6.2 di atas sangat sukar kita tentukan luasnya, karena untuk menentukan luas bidang pada gambar 6.2 tersebut, kita membutuhkan beberapa bantuan pendekatan dan memerlukan ketelitian yang cukup rumit.

Agar lebih dapat memahami permasalahan di atas, coba pahami percakapan di bawah ini!

Budi adalah seorang mahasiswa pendidikan matematika disalah satu perguruan tinggi. Suatu ketika adiknya yang masih kelas VII SMP bertanya kepadanya:

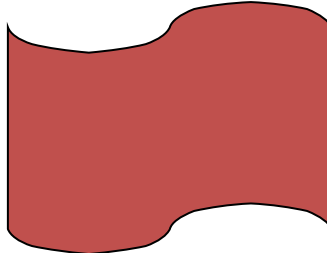
Adik : Bang, dapatkah abang membantu saya untuk
menyelesaikan permasalahan ini?

Budi : Apa permasalahannya dek?

Adek : Saya disuruh oleh guru untuk menghitung luas bangun seperti ini (sambil memperlihatkan gambar yang ada dibuku tulisnya)



Gambar 6.3



Gambar 6.4

Saya tidak mengetahui bagaimana cara menghitung luas bangun tersebut!

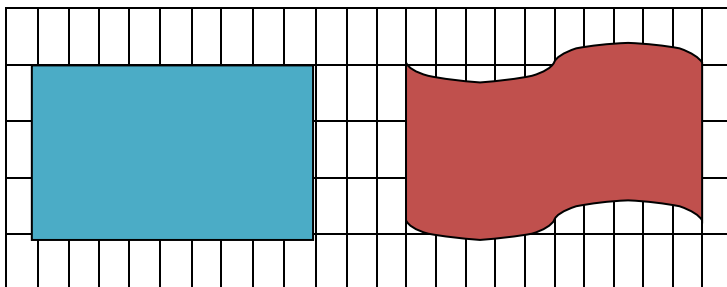
Budi : Oh..... Itu mudah dek, untuk bangun pertama (gambar 6.3) cara menghitung luasnya, cukup dengan mengalikan panjang sisi-sisinya. Hal itu dilakukan, karena bangun pertama berbentuk persegi panjang, maka luasnya didapat dengan mengalikan sisi panjang dan sisi lebarnya. Sedangkan untuk bangun kedua (gambar 6.4), menghitung luasnya sama dengan menghitung luas bangun pertama.

Adek : Oh..... begitu, terima kasih bang.

Berdasarkan percakapan antara Budi dan Adeknya di atas, apakah penyelesaian yang dinyatakan Budi terhadap permasalahan yang dihadapinya oleh Adeknya sudah benar?

Untuk membantu menyelesaikan permasalahan tersebut, maka perhatikan aktivitas berikut ini

1. Sketsalah gambar 6.3 dan 6.4 yang terdapat pada halaman sebelumnya pada kertas kotak berikut!



2. Hitunglah banyaknya petak persegi satuan penuh yang ada di dalam sketsa gambar 6.3 dan 6.4 tersebut.
3. Gabungkanlah petak satuan yang tidak penuh sedemikian sehingga kira-kira sama dengan jumlah petak satuan penuh
4. Totalkan banyaknya satuan petak yang penuh berdasarkan aktivitas yang dilakukan pada nomor 2 dan 3.
5. Luas satu petak persegi satuan penuh dikalikan dengan banyaknya petak persegi satuan yang penuh merupakan luas yang mendekati luas gambar 6.3 dan 6.4 sebenarnya.

Berdasarkan aktivitas di atas, identifikasilah berapa luas gambar 6.3 dan gambar 6.4, serta apakah luas gambar 6.3 sama dengan luas gambar 6.4? Selanjutnya cobalah kalian lakukan kegiatan yang sama dengan aktivitas di atas, untuk menentukan berapakah luas gambar di bawah ini?

Dinyatakan bahwa luas gambar daun pisang sama dengan luas gambar daun pepaya. Tentukan apakah pernyataan tersebut benar?



Gambar 6.5

Setelah selesai melakukan kegiatan di atas, maka:

1. Apakah pernyataan “luas gambar daun pisang sama dengan luas gambar daun pepaya” benar? Jika salah, maka nyatakan luas gambar daun pisang serta luas gambar daun pepaya tersebut!
2. Apakah luas yang ditemukan merupakan luas sebenarnya? Berikan alasan!

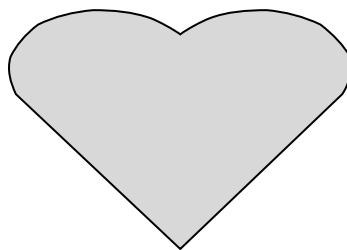
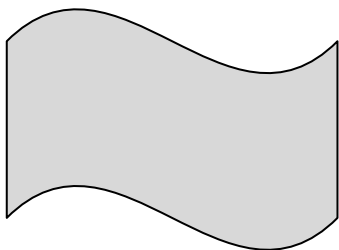
RANGKUMAN

Dari permasalahan yang disajikan dan aktivitas yang telah dilakukan, maka ada beberapa hal yang perlu diperhatikan, diantaranya:

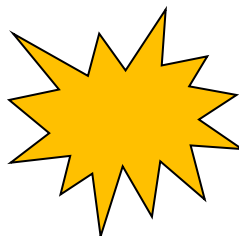
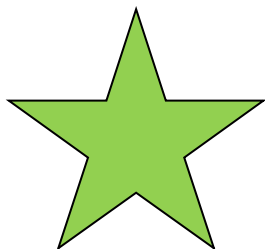
1. Penyelesaian yang telah dilakukan di atas, dapat juga disebut sebagai penyelesaian secara partisi atau membagi permukaan bidang menjadi bagian tertentu.
2. Tidak semua permukaan bidang dapat diselesaikan dengan langsung menggunakan cara partisi di atas, oleh sebab itu jika menemui kendala maka lakukanlah dengan cara yang telah dijelaskan oleh Reimann

LATIHAN

1. Tentukan apakah luas gambar di bawah ini sama? Berikan alasan!



2. Dinyatakan luas gambar di bawah ini adalah sama. Tentukan apakah pernyataan tersebut benar atau salah? Berikan alasan!



3. Nyatakan apa kesulitan dan kesimpulan yang kamu peroleh dari penyelesaian latihan nomor 1 dan 2!

6.2 Luas Daerah Pada Bidang

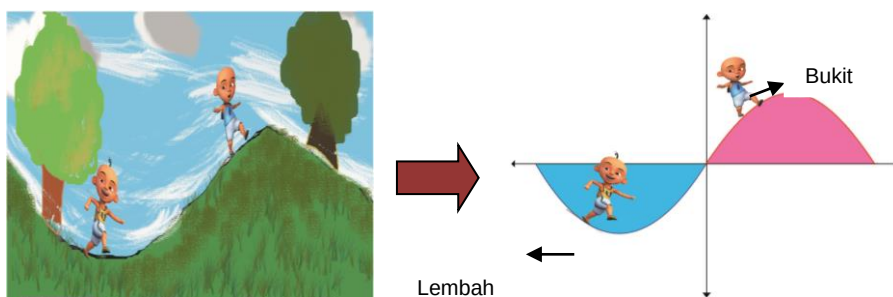
Pada pembahasan sebelumnya yaitu pengantar dasar aplikasi integral tentu, kita telah dihadapkan pada beberapa permasalahan yang harus diselesaikan. Permasalahan tersebut dapat dengan mudah kita selesaikan dengan menggunakan integral tentu. Untuk kasus pada pembahasan sebelumnya, kita dapat menggunakan aplikasi integral tentu pada luas daerah bidang datar. Integral tentu akan dapat membantu kita dalam menentukan luas bidang yang bentuknya tidak beraturan. Untuk lebih memahaminya perhatikan penjelasan berikut

6.2.1 Luas Daerah di Atas dan di Bawah Sumbu x atau Luas Daerah yang dibatasi Oleh Kurva $y = f(x)$, sumbu x , dan garis $x = a$ dan $x = b$.

Untuk mempelajari luas daerah antara suatu kurva $y = f(x)$ dan sumbu x , untuk $f(x) \geq 0$ atau $f(x) \leq 0$, maka terlebih dahulu kalian harus sudah mempelajari dan memahami konsep integral tak tentu dan integral tentu serta mampu menghitung integral tak tentu dan integral tentu. Selanjutnya kalian juga harus sudah mempelajari cara menggambar kurva fungsi kuadrat dan menggambar kurva suatu fungsi yang bukan fungsi kuadrat.

Untuk memahami bagaimana penggunaan konsep integral tentu dalam penentuan luas daerah pada bidang, ayo coba perhatikan permasalahan di bawah ini.

Pada suatu hari, Ipin dan Upin melakukan *travelling*. Dalam *Travelling* yang dilakukan oleh Ipin dan Upin, mereka akan melewati sebuah lembah dan sebuah bukit. *Track* yang akan dilewati oleh Ipin dan Upin adalah sebuah lembah dan kemudian baru dilanjutkan dengan *track* berikutnya yaitu bukit. *Travelling* yang dilakukan oleh Ipin dan teman-teman dapat dinyatakan dalam gambar berikut:



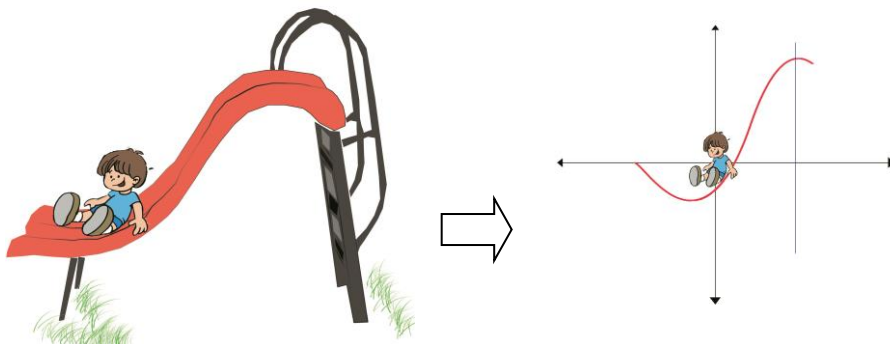
Gambar 6.6

Coba kalian amati gambar tersebut, apakah untuk menentukan luas lembah dan bukit yang dilewati oleh Ipin dan Upin bisa ditentukan dengan melakukan aktivitas seperti menghitung luas daun pisang dan daun pepaya pada materi sebelumnya? Berikan alasan. Selanjutnya identifikasilah apakah ada cara lain yang bisa digunakan untuk membantu Ipin dan Upin untuk menghitung luas lembah dan bukit yang telah dilewati?

Sebelum memulai untuk membantu Ipin dan teman-teman, maka tentunya kalian sudah memahami dan mengetahui bagaimana cara menggambar sebuah kurva kuadrat. Oleh sebab itu, gunakanlah pengetahuan tersebut, untuk menyelesaikan

permasalahan berikut, yang pada akhirnya kalian juga akan dapat menyelesaikan masalah sebelumnya. Perhatikan permasalahan berikut.

Pada suatu hari Fariz pergi kesebuah arena permainan. Di sana ia sudah mencoba berbagai permainan. Permainan yang paling terakhir dicobanya adalah seluncuran. Fariz meluncur dari satu titik dan lintasan seluncurannya menyerupai bentuk kurva fungsi kuadrat yang persamaannya adalah $y = x^2 - 3x - 4$. Kurva dari lintasan tersebut dapat disketsa sebagai berikut:



Gambar 6.7

Untuk dapat mensketsa persamaan $y = x^2 - 3x - 4$ ke sumbu koordinat, perhatikan langkah berikut ini:

1. Menentukan titik puncak fungsi kuadrat (X_P , Y_P)

Respon

$$x_p = \frac{-b}{2a}, \text{ dan } y_p = \frac{D}{-4a} = \frac{b^2 - 4ac}{-4a}$$

Untuk persamaan fungsi kuadrat di atas, diketahui bahwa:

$a = 1$; $b = -3$; dan $c = -4$, maka:

$$x_p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2(1)} = \frac{3}{2}; y_p = \frac{b^2 - 4ac}{-4a} \\ = \frac{(-3)^2 - 4(1)(-4)}{-4(1)} = \frac{17}{-4}$$

2. Tentukan titik potong fungsi kuadrat dengan sumbu x dan sumbu y

Respon

Jika $x = 0$; maka: $y = x^2 - 3x - 4$ (substitusi nilai x)

$$y = (0)^2 - 3(0) - 4$$

$$y = -4, (0, -4)$$

Jika $y = 0$; maka: $y = x^2 - 3x - 4$ (substitusi nilai y)

$$0 = x^2 - 3x - 4$$

$$0 = (x - 4)(x + 1)$$

Sehingga diperoleh $x = -1$ dan $x = 4$

Jadi titik-titik potongnya adalah $(0, -4)$, $(-1, 0)$, dan $(4, 0)$

3. Menentukan titik bantu

Respon

Titik bantu dapat diperoleh dengan memisalkan nilai x dan y dengan beberapa nilai yang tidak termasuk dalam titik potong maupun titik puncak. Titik bantu berfungsi mempermudah dalam menggambar sebuah kurva dari sebuah persamaan. Pada permasalahan ini, titik bantu yang kita gunakan adalah $x = 1$; $x = 2$; dan $x = 3$. Jika titik start Ipin dan teman-teman melakukan seluncuran adalah $x = 6$, maka $x = 6$ dapat dijadikan titik bantunya. Untuk nilai y yang diperoleh dari titik bantu yang sudah ditentukan dapat dinyatakan dalam tabel berikut:

x	1	2	3	6
y	-6	-6	-4	14
(x,y)	(1,-6)	(2,-5)	(3,-4)	(6,14)

4. Melukis kurva berdasarkan titik-titik yang telah diperoleh

Respon

Sajikan gambar kurvanya

5. Menentukan batas integrasi berdasarkan kurva yang telah diperoleh

Respon

Perhatikan kurva yang telah disajikan di atas, kurva tersebut terdiri dari dua daerah, sehingga batas integrasi nya adalah $x = -1$ dan $x = -4$ serta $x = 4$ dan $x = 6$.

6. Menentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva

Respon

Perhatikan kembali kurva yang terbentuk. Kurva tersebut terdiri dari dua daerah, yaitu daerah pertama terletak dibawah sumbu x , dimana $f(x) \leq 0$, dan daerah kedua terletak di atas sumbu x , dimana $f(x) \geq 0$. Dengan mengingat kembali konsep integral tentu, dimana integral tentu dinotasikan dengan: $\int_a^b f(x)dx$; artinya $f(x)$ suatu fungsi yang didefinisikan pada selang tertutup $[a,b]$. $\int_a^b f(x)dx$ juga dinyatakan sebagai luas daerah yang terkurung di antara kurva $y = f(x)$ dan sumbu x dalam selang $[a,b]$, yang berarti tanda positif disisipkan pada luas bagian-bagian yang berada di atas sumbu x dan tanda negatif

disisipkan pada luas bagian-bagian yang berada di bawah sumbu x.

Sehingga pada permasalahan di atas, luas daerah pertama dapat dinyatakan sebagai:

$$L_1 = - \int_a^b f(x) dx$$

$$L_1 = - \int_{-1}^4 (x^2 - 3x - 4) dx = - \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 - 4x \right]_{-1}^4$$

$$L_1 = - \left[\frac{1}{3} (4)^3 - \frac{3}{2} (4)^2 - 4(4) \right] + \left[\frac{1}{3} (-1)^3 - \frac{3}{2} (-1)^2 - 4(-1) \right]$$

$$L_1 = - \left[\frac{64}{3} - 24 - 16 \right] + \left[-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 \right]$$

$$L_1 = - \left[\frac{184}{3} \right] + \left[\frac{13}{6} \right] = -\frac{355}{6} = \frac{355}{6} \text{ Satuan Luas}$$

Sekarang coba kalian tentukan luas daerah yang keduanya.

7. Menentukan luas keseluruhannya

Respon

Setelah mendapatkan luas daerah pertama dan luas daerah kedua, maka untuk mendapatkan luas keseluruhannya, jumlahkan kedua luas daerah tersebut.

Selanjutnya perhatikan permasalahan ipin dan teman-teman yang melakukan *travelling* di atas. Jika *track* pertama yang akan dilewati oleh ipin dan teman-teman dimulai dari titik -5 dan sampai di titik 0, serta *track* kedua yang akan dilewati oleh ipin dan teman-

teman dimulai dari titik 0 dan di akhiri pada titik 5. Lembah dan bukit diinterpretasikan sebagai sebuah kurva dengan persamaan $y = x\sqrt{4 - x^2}$, maka bantulah ipin dan teman-teman untuk menghitung luas lembah dan bukit yang telah dilewatinya!

Salah satu obyek wisata yang terkenal di provinsi Riau, bahkan sampai ke manca negara adalah adanya gelombang yang terdapat di salah satu sungai di Riau. Gelombang tersebut di sebut oleh masyarakat setempat dengan sebutan “BONO”. Gelombang Bono tersebut dapat dipergunakan untuk arena olahraga *surfing*. Apabila satu gelombang Bono terdiri dari satu bukit dan satu lembah, dan gelombang Bono tersebut dapat dianalogikan sebagai kurva dengan persamaan $y = -x^3 + 4x$ dengan $x = -2$ dan $x = 2$. Apabila gelombang tersebut terdiri dari 5 gelombang, maka berapakah luas keseluruhan gelombang tersebut?

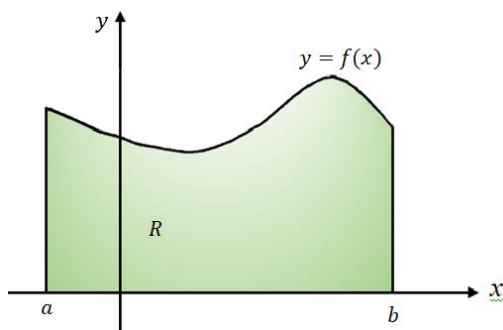
Beberapa permasalahan terkait luas bidang datar di atas secara matematis dapat dinyatakan sebagai berikut:

Andaikan $y = f(x)$ menyatakan suatu kurva pada bidang XY dan andaikan fungsi y kontinu pada interval $[a,b]$.

- a. jika $f(x) \geq 0$, untuk semua x dalam $[a,b]$, andaikan R adalah daerah yang dibatasi kurva $y = f(x)$, sumbu x , garis $x = a$ dan garis $x = b$, luas daerah R dapat ditentukan dengan aturan sebagai berikut:

$$A(R) = \int_a^b f(x)dx$$

Kondisi untuk poin a ini lebih jelasnya dapat diperhatikan pada gambar di bawah ini:

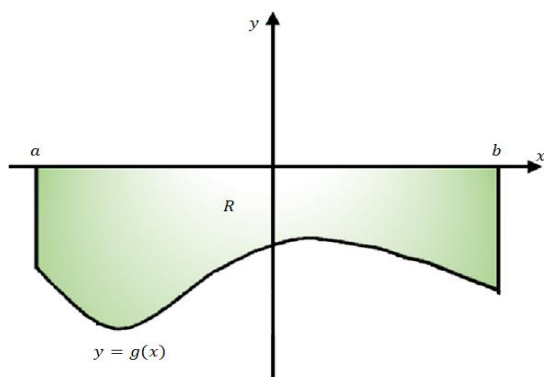


Gambar 6.8

- b. jika $f(x) \leq 0$, untuk semua x dalam $[a,b]$, andaikan R adalah daerah yang dibatasi kurva $y = f(x)$, sumbu x , garis $x = a$ dan garis $x = b$, luas daerah R dapat ditentukan dengan aturan sebagai berikut:

$$A(R) = - \int_a^b f(x) dx$$

Kondisi untuk poin b ini lebih jelasnya dapat diperhatikan pada gambar di bawah ini:



Gambar 6.9

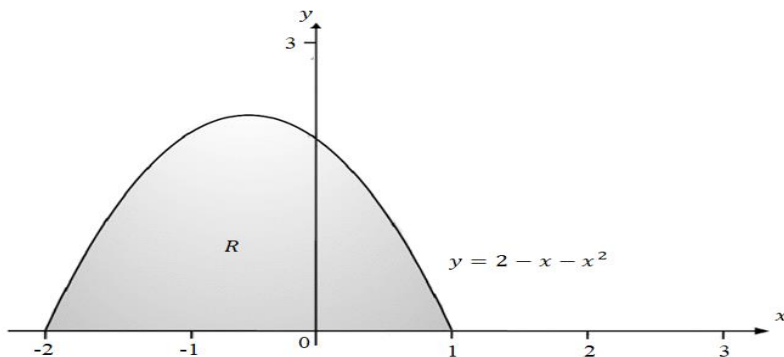
Agar lebih dapat memahami bagaimana penggunaan dari aturan di atas, perhatikan beberapa contoh di bawah ini.

Contoh 1

Dinyatakan bahwa luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 2 - x - x^2$ dan selang $-2 \leq x \leq 1$ adalah $\frac{7}{3}$ satuan luas. Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan tersebut dengan menyatakan proses penyelesaiannya!

Jawaban

1. Untuk menentukan nilai kebenaran dari pernyataan tersebut, kita tidak dapat menentukannya secara langsung. Langkah yang dapat kita lakukan adalah dengan cara mensketsa terlebih dahulu persamaan kurva dan selang yang diberikan. Selanjutnya, setelah kita sketsa, barulah kita dapat menentukan konsep luas mana yang bisa gunakan untuk menentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 2 - x - x^2$ dan selang $-2 \leq x \leq 1$. Dengan menggunakan langkah – langkah dalam mensketsa kurva yang telah disajikan di atas, maka sketsa kurvanya dapat dilihat pada gambar di bawah ini:



Dari gambar tersebut, dapat kita lihat bahwa konsep luas yang akan kita gunakan untuk menentukan luas daerahnya adalah menggunakan aturan luas daerah di atas sumbu x .

2. Jadi perhitungan luas bidang (daerah R) di bawah kurva $y = 2 - x - x^2$ dan dibatasi oleh selang $-2 \leq x \leq 1$ adalah sebagai berikut:

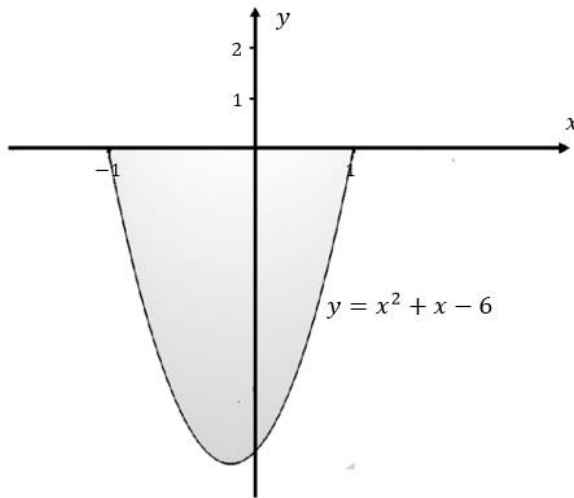
$$\begin{aligned} A(R) &= \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx \\ &= \left[2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^1 \\ &= \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(2(-2) - \frac{1}{2}(-2)^2 - \frac{1}{3}(-2)^3 \right) \\ &= \frac{7}{6} + \frac{10}{3} \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Contoh 2

Tentukan konsep luas mana yang bisa digunakan untuk menentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 + x - 6$ dan selang $-3 \leq x \leq 2$ dengan disertai alasan, kemudian sajikan proses penyelesaiannya!

Jawaban

Daerah R diperlihatkan pada gambar 4 berikut ini.



Jadi, perhitungan luas bidang (daerah R) di bawah kurva $y = x^2 + x - 6$ dan dibatasi oleh selang $-3 \leq x \leq 2$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 A(R) &= - \int_{-3}^2 (x^2 + x - 6) dx \\
 &= - \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - 6x \right] \\
 &= - \left[\left(\frac{8}{3} + 2 - 12 \right) - \left(-9 + \frac{9}{2} + 18 \right) \right] \\
 &= - \left[\frac{16}{6} - \frac{27}{6} - 19 \right] \\
 &= \frac{125}{6}
 \end{aligned}$$

Contoh 3

Perhatikan beberapa pernyataan di bawah ini

- luas daerah yang dibatasi oleh kurva $f(x) = 2x - 1$, sumbu x dan garis – garis $x = 1$ dan $x = 2$ adalah 5 satuan luas.

- b. luas daerah yang dibatasi oleh $x - 2y - 1 = 0$, sumbu y dan garis – garis $y = 1$ dan $y = 3$ adalah 10 satuan luas.
- c. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $3x - y - 6 = 0$, sumbu x , garis – garis $x = 0$ dan $x = 3$ adalah 13 satuan luas

Tentukan:

- Apakah selesaian yang dinyatakan di atas bernilai benar?
 - Jika ya, nyatakan selesaiannya!
 - Jika tidak, nyatakan perbedaannya dengan disertai alasan!

Penyelesaian

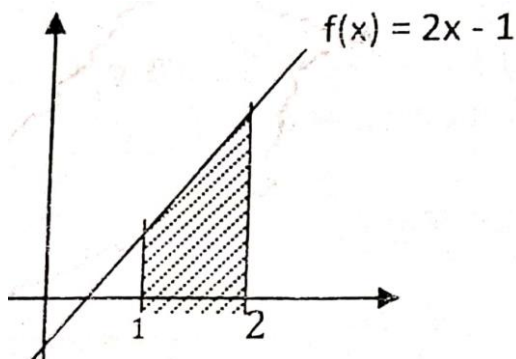
- a. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $f(x) = 2x - 1$, sumbu x , garis – garis $x = 1$ dan $x = 2$.

Nilai kebenaran dari pernyataan ini tidak dapat langsung kita tentukan. Untuk dapat menentukan nilai kebenaran dari pernyataan tersebut, ada beberapa langkah yang harus dilakukan

- Sketsalah terlebih dahulu gambar dari kurva $f(x) = 2x - 1$, sumbu x , garis – garis $x = 1$ dan $x = 2$.

Respon

- Pada pembelajaran di kalkulus 1 atau kalkulus differensial, kalian telah mempelajari bagaimana mensketsa gambar dari sebuah grafik fungsi. Silakan gunakan keterampilan tersebut untuk mensketsa gambar dari kurva $f(x) = 2x - 1$, sumbu x , garis – garis $x = 1$ dan $x = 2$. Jika kalian berhasil, sketsa gambar dari kurva kurva $f(x) = 2x - 1$, sumbu x , garis – garis $x = 1$ dan $x = 2$ adalah seperti yang dinyatakan di bawah ini.



- Menentukan daerah mana yang akan dicari luasnya

Respon

Di sketsa gambar kurva $f(x) = 2x - 1$, sumbu x , garis – garis $x = 1$ dan $x = 2$ yang telah dinyatakan di atas, dapat kita bahwa ada daerah yang di arsir. Nah, daerah yang diarsir itulah yang merupakan daerah yang di akan di carikan luasnya.

- Menentukan aturan integral mana yang bisa digunakan untuk menentukan luas daerah tersebut.

Respon

Untuk menentukan aturan integral mana yang dapat digunakan, kita dapat melihat kurva, sumbu, titik atau garis – garis yang diberikan serta sketsa gambar yang telah disajikan.

Kurva yang diberikan adalah $f(x) = 2x - 1$

Sumbunya adalah sumbu x

Garis – garisnya adalah $x = 1$ dan $x = 2$

Berdasarkan info tersebut dapat kita tentukan bahwa aturan integral yang dapat kita gunakan adalah

$$A(R) = \int_a^b f(x)dx$$

- Gunakan aturan hitung integral tersebut untuk menentukan luas daerahnya

Respon

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_a^b f(x)dx = \int_1^2 (2x - 1)dx \\ &= \left[\frac{2x^2}{2} - x \right]_1^2 \\ &= [(2^2 - 2) - (1^2 - 1)] \\ &= 2 \text{ Satuan Luas} \end{aligned}$$

- Membuat kesimpulan

Respon

Berdasarkan hasil selesain yang diperoleh adalah luas daerah dari kurva $f(x) = 2x - 1$, sumbu x , garis – garis $x = 1$ dan $x = 2$ adalah 2 satuan luas. Sedangkan di soal dinyatakan bahwa luas daerah yang dibatasi oleh kurva $f(x) = 2x - 1$, sumbu x dan garis – garis $x = 1$ dan $x = 2$ adalah 5 satuan luas. Hal ini dapat disimpulkan bahwa nilai kebenaran dari pernyataan poin a tersebut adalah salah.

6.2.2 Luas Daerah yang dibatasi Oleh Kurva $x = f(y)$, sumbu y , dan garis $y = a$ dan $y = b$.

Selain luas daerah yang dibatasi oleh Kurva $y = f(x)$, sumbu x , dan garis $x = a$ dan $x = b$, luas daerah lainnya dapat juga dihitung untuk kurva $x = f(y)$, sumbu y , dan garis $y = a$ dan $y = b$ yang

menyatakan menyatakan suatu kurva pada bidang XY dan andaikan fungsi y kontinu pada interval $[a,b]$.

- a. jika $f(y) \geq 0$, untuk semua y dalam $[a,b]$, andaikan R adalah daerah yang dibatasi kurva $x = f(y)$, sumbu y , garis $y = a$ dan garis $y = b$, luas daerah R dapat ditentukan dengan aturan sebagai berikut:

$$A(R) = \int_a^b f(y)dy$$

- b. jika $f(y) \leq 0$, untuk semua y dalam $[a,b]$, andaikan R adalah daerah yang dibatasi kurva $x = f(x)$, sumbu y , garis $y = a$ dan garis $y = b$, luas daerah R dapat ditentukan dengan aturan sebagai berikut:

$$A(R) = - \int_a^b f(y)dy$$

Untuk lebih memahami penerapan konsep luas daerah bidang datar di atas, maka perhatikan beberapa contoh di bawah ini:

Contoh 1

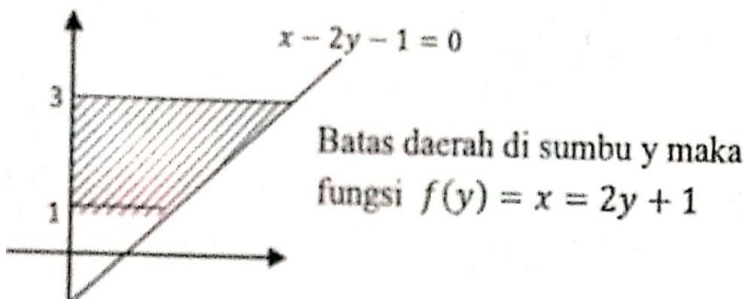
luas daerah yang dibatasi oleh $x - 2y - 1 = 0$, sumbu y dan garis – garis $y = 1$ dan $y = 3$ adalah 10 satuan luas.

Nilai kebenaran dari pernyataan ini tidak dapat langsung kita tentukan. Untuk dapat menentukan nilai kebenaran dari pernyataan tersebut, ada beberapa langkah yang harus dilakukan

- Sketsalah terlebih dahulu gambar dari $x - 2y - 1 = 0$, sumbu y dan garis – garis $y = 1$ dan $y = 3$

Respon

Pada pembelajaran di kalkulus 1 atau kalkulus differensial, kalian telah mempelajari bagaimana mensketsa gambar dari sebuah grafik fungsi. Silakan gunakan keterampilan tersebut untuk mensketsa gambar dari $x - 2y - 1 = 0$, sumbu y dan garis – garis $y = 1$ dan $y = 3$. Jika kalian berhasil, sketsa gambar dari $x - 2y - 1 = 0$, sumbu y dan garis – garis $y = 1$ dan $y = 3$ adalah seperti yang dinyatakan di bawah ini.



- Menentukan daerah mana yang akan dicarikan luasnya

Respon

Di sketsa gambar kurva $f(y) = 2y + 1$, sumbu y , garis – garis $y = 1$ dan $y = 3$ yang telah dinyatakan di atas, dapat kita bahwa ada daerah yang di arsir. Nah, daerah yang diarsir itulah yang merupakan daerah yang di akan di carikan luasnya.

- Menentukan aturan integral mana yang bisa digunakan untuk menentukan luas daerah tersebut.

Respon

Untuk menentukan aturan integral mana yang dapat digunakan, kita dapat melihat kurva, sumbu, titik atau garis – garis yang diberikan serta sketsa gambar yang telah disajikan.

Kurva yang diberikan adalah $f(y) = 2y - 1$

Sumbunya adalah sumbu y

Garis – garisnya adalah $y = 1$ dan $y = 2$

Berdasarkan info tersebut dapat kita tentukan bahwa aturan integral yang dapat kita gunakan adalah

$$A(R) = \int_a^b f(y)dy$$

- Gunakan aturan hitung integral tersebut untuk menentukan luas daerahnya

Respon

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_a^b f(y)dy = \int_1^3 (2y + 1)dy \\ &= \left[\frac{2y^2}{2} + y \right]_1^3 \\ &= [(3^2 + 3) - (1^2 + 1)] \\ &= 10 \text{ Satuan Luas} \end{aligned}$$

- Membuat kesimpulan

Respon

Berdasarkan hasil selesain yang diperoleh adalah luas daerah dari kurva $f(y) = 2y + 1$, sumbu y , garis – garis $y = 1$ dan $y = 3$ adalah 10 satuan luas. Sedangkan di soal dinyatakan bahwa luas daerah yang dibatasi oleh $x - 2y - 1 = 0$, sumbu y dan garis – garis $y = 1$ dan $y = 3$ adalah 10 satuan

luas. Hal ini dapat disimpulkan bahwa nilai kebenaran dari pernyataan poin b tersebut adalah benar.

Contoh 2

Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $3x - y - 6 = 0$, sumbu x , garis – garis $x = 0$ dan $x = 3$ adalah 13 satuan luas. Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan tersebut!

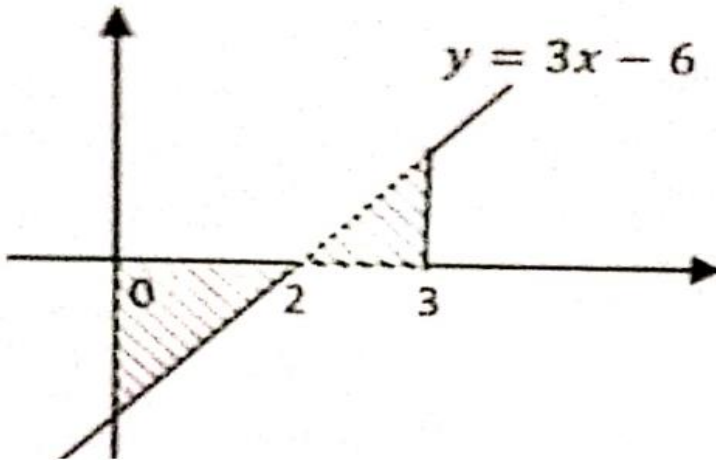
Jawaban

Nilai kebenaran dari pernyataan ini tidak dapat langsung kita tentukan. Untuk dapat menentukan nilai kebenaran dari pernyataan tersebut, ada beberapa langkah yang harus dilakukan

- Sketsalah terlebih dahulu gambar dari kurva $3x - y - 6 = 0$, sumbu x , garis – garis $x = 0$ dan $x = 3$

Respon

Pada pembelajaran di kalkulus 1 atau kalkulus differensial, kalian telah mempelajari bagaimana mensketsa gambar dari sebuah grafik fungsi. Silakan gunakan keterampilan tersebut untuk mensketsa gambar dari kurva $3x - y - 6 = 0$, sumbu x , garis – garis $x = 0$ dan $x = 3$. Jika kalian berhasil, sketsa gambar dari kurva kurva $3x - y - 6 = 0$, sumbu x , garis – garis $x = 0$ dan $x = 3$ adalah seperti yang dinyatakan di bawah ini.



- Menentukan daerah mana yang akan dicari luasnya

Respon

Di sketsa gambar kurva $3x - y - 6 = 0$, sumbu x , garis – garis $x = 0$ dan $x = 3$ yang telah dinyatakan di atas, dapat kita bahwa ada daerah yang di arsir. Nah, daerah yang diarsir itulah yang merupakan daerah yang akan di carikan luasnya.

- Menentukan aturan integral mana yang bisa digunakan untuk menentukan luas daerah tersebut.

Respon

Untuk menentukan aturan integral mana yang dapat digunakan, kita dapat melihat kurva, sumbu, titik atau garis – garis yang diberikan serta sketsa gambar yang telah disajikan.

Kurva yang diberikan adalah $3x - y - 6 = 0$; $y = 3x - 6$

Sumbunya adalah sumbu x

Titiknya adalah $x = 0$ dan $x = 2$ serta $x = 2$ dan garis $x = 3$

Berdasarkan info tersebut dapat kita tentukan bahwa aturan integral yang dapat kita gunakan adalah

$$A(R) = \int_a^b f(x)dx \text{ dan } A(R) = - \int_a^b f(x)dx$$

Karena ada dua luas daerah yang mau dihitung, maka untuk luas daerah 1 yaitu dengan batas $x = 0$ dan $x = 2$, kita gunakan aturan $A(R) = - \int_a^b f(x)dx$ sedangkan untuk luas daerah 2 yaitu dengan batas $x = 2$ dan $x = 3$ kita gunakan aturan $A(R) = \int_a^b f(x)dx$. luas daerah kurva $3x - y - 6 = 0$, sumbu x , garis – garis $x = 0$ dan $x = 3$ adalah jumlah dari luas 1 dan luas 2

- Gunakan aturan hitung integral tersebut untuk menentukan luas daerahnya

Respon

Luas 1

$$\begin{aligned} A(R) &= - \int_a^b f(x)dx = - \int_0^2 (3x - 6)dx \\ &= \left[\frac{3x^2}{2} - 6x \right]_0^2 \\ &= \left[\left(\frac{3(2)^2}{2} - 6(2) \right) - \left(\frac{3(0)^2}{2} - 6(0) \right) \right] \\ &= - 6 \text{ satuan luas} \end{aligned}$$

Luas 2

$$A(R) = \int_a^b f(x)dx = \int_2^3 (3x - 6)dx$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{3x^2}{2} - 6x \right]_2^3 \\ &= \left[\left(\frac{3(3)^2}{2} - 6(3) \right) - \left(\frac{3(2)^2}{2} - 6(2) \right) \right] \\ &= \left[\left(\frac{27}{2} - 18 \right) - \left(\frac{12}{2} - 12 \right) \right] \\ &= \left(-\frac{9}{2} \right) - \left(-\frac{12}{2} \right) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Karena luas tidak ada yang negative, sehingga:

$$\begin{aligned} \text{Luas 1} + \text{Luas 2} &= \frac{3}{2} + 6 \\ &= \frac{15}{2} \text{ atau } 7\frac{1}{2} \text{ satuan luas} \end{aligned}$$

- Membuat kesimpulan

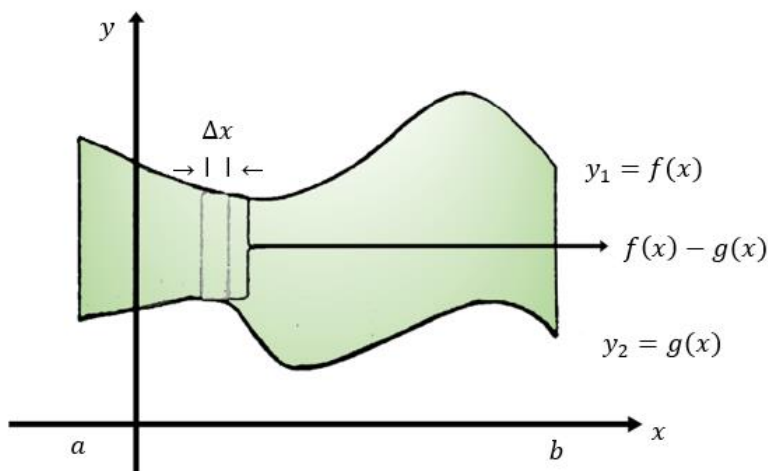
Respon

Berdasarkan hasil selesain yang diperoleh adalah luas daerah dari kurva $3x - y - 6 = 0$, sumbu x , garis – garis $x = 0$ dan $x = 3$ adalah $\frac{15}{2}$ atau $7\frac{1}{2}$ satuan luas. Sedangkan di soal dinyatakan bahwa Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $3x - y - 6 = 0$, sumbu x , garis – garis $x = 0$ dan $x = 3$ adalah 13 satuan luas. Hal ini dapat disimpulkan bahwa nilai kebenaran dari pernyataan poin c tersebut adalah salah.

6.2.3 Luas Bidang Datar Antara Dua Kurva

Secara umum, pembahasan pada bahan ajar sebelumnya secara implisit sudah menyiratkan bahwa bagaimana menentukan luas bidang datar antara dua kurva. Pada bahan ajar sebelumnya,

walaupun yang diketahui hanya satu kurva dan terhadap sumbu x , tetapi pada hakikatnya sumbu x itu sendiri merupakan kurva yaitu $f(x) = 0$. Tetapi apabila kita menemukan dua buah atau lebih kurva, maka bagaimanakah menentukan luas bidanganya?. Sebelum menjawab pertanyaan tersebut, perhatikan gambar di bawah ini.



Gambar 6.10

Perhatikan kurva-kurva yang diberikan oleh fungsi $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $g(x) \leq f(x)$ pada selang $a \leq x \leq b$. Kurva-kurva dan selang tersebut membatasi daerah yang tergambarkan pada gambar 6.10. Jika kita diminta untuk menentukan luas daerah dari gambar 6.10 tersebut, kita juga tidak dapat menentukan secara langsung, kita dapat menggunakan hampiran atau integral untuk menemukan luas tersebut.

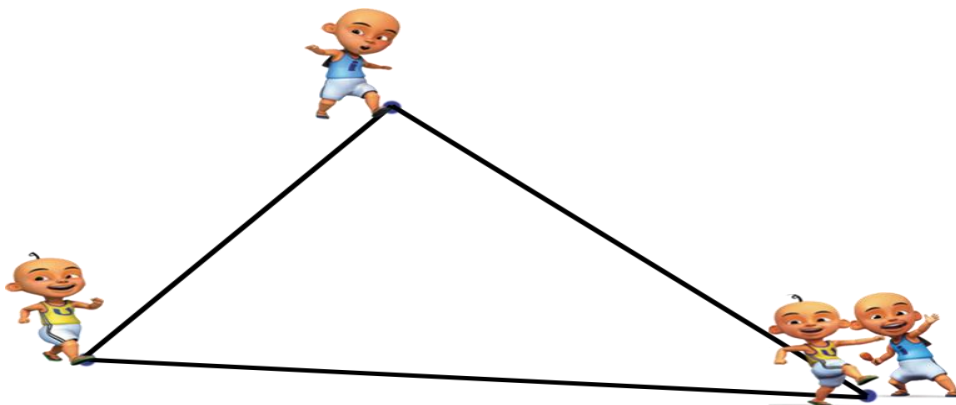
$$\text{Perhatikan } \Delta A = f(x)\Delta x - g(x)\Delta x = [f(x) - g(x)]\Delta x$$

$$\text{Sehingga } A = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - g(x_i)]\Delta x.$$

$$= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Tentu muncul pertanyaan, mengapa tidak bisa menggunakan aturan yang sama dengan menentukan luas daerah diatas dan di bawah sumbu x ? Untuk dapat menjawab permasalahan tersebut, maka perhatikan dan pahami permasalahan berikut ini.

Pada suatu hari Ipin dan Upin melakukan perjalanan. Jika Ipin dan Upin *start* dari dua titik yang berbeda dan akhir dari perjalanan, mereka akan bertemu disatu titik yang sama. Perjalanan Ipin dan Upin tersebut, dapat disketsa pada gambar di bawah ini:



Gambar 6.11

Perhatikan sketsa perjalanan Ipin dan Upin di atas? Apakah untuk menentukan luas daerah yang terbentuk bisa menggunakan pengetahuan yang telah kalian peroleh sebelumnya? Berikan alasan!. Selanjutnya identifikasilah bagaimana cara untuk menentukan luas daerah yang terbentuk dari sketsa perjalanan Ipin dan Upin di atas bersama anggota kelompok mu!

Untuk menyelesaikan permasalahan di atas, maka terlebih dahulu kalian harus mengingat kembali konsep dalam menentukan persamaan garis maupun persamaan kuadrat. Oleh sebab itu perhatikan dan lakukan aktivitas sesuai dengan panduan berikut bersama anggota kelompok mu.

Misalkan Mei-Mei bermain *Pool Dance* di sebuah arena permainan. Gerakan yang dilakukan membentuk sebuah segitiga dengan perubahan posisi dari tiap titik sudutnya adalah $(-4,1)$, $(-1,-5)$ dan $(2,-2)$. Untuk menentukan luas daerah yang dibatasi oleh gerakan *Pool Dance* yang dilakukan oleh Mei-Mei, maka ada beberapa tahapan yang harus dilakukan, diantaranya:

1. Menentukan sebuah persamaan atau fungsi dari permasalahan yang diberikan

Permasalahan yang diberikan di atas dapat diidentifikasi bahwa daerah yang terbentuk dari pergerakan yang dilakukan oleh Mei-Mei adalah daerah segitiga dengan tiga titik sudut. Karena terdapat tiga buah titik sudut, maka akan terdapat tiga buah persamaan garis yang melalui titik tersebut. Dalam menentukan persamaan garis, maka ingat kembali konsep dalam menentukan persamaan garis melalui titik.

Untuk menentukan persamaan garis yang melalui dua titik, maka digunakan aturan $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Gunakan persamaan ini untuk menentukan persamaan garis dari permasalahan di atas.

Persamaan yang melalui titik $(-4,1)$ dan $(-1, -5)$ yaitu:

$$\frac{y-1}{-5-1} = \frac{x-(-4)}{(-1)-(-4)} \iff \frac{y-1}{-6} = \frac{x+4}{3}$$

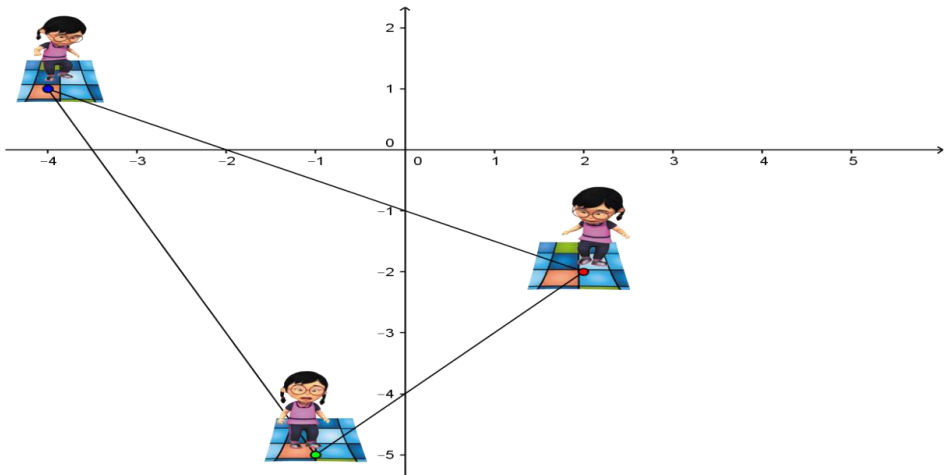
$$3(y - 1) = -6(x + 4) \qquad 3y - 3 = -6x - 24$$

$$3y = -6x - 24 - 3 \iff 3y = -6x - 21$$

$$y = -2x - 7$$

Bersama anggota kelompok mu, silakan tentukan persamaan garis yang melalui titik $(-1,4)$ dan $(5,1)$ serta persamaan garis yang melalui titik $(2,-2)$ dan $(5,1)$.

2. Jika persamaan garis yang kalian benar, maka sketsa gambarnya akan terlihat seperti gambar di bawah ini:



Gambar 6.12

3. Menentukan luas bidang yang dimaksud

Untuk menentukan luas bidang datar yang dibatasi oleh ketiga garis tersebut, maka perhatikan kembali sketsa gambar 11 di atas. Berdasarkan gambar di atas, maka kita dapat menentukan bahwa sketsa gambar tersebut terdiri dari dua buah luas daerah, yaitu luas daerah 1 dan luas daerah 2. Luas daerah satu dimulai dari interval -4 sampai -1 , sedangkan persamaan

garis yang membatasinya adalah $y = f(x) = -\frac{1}{2}x - 1$ dan $y = g(x) = -2x - 7$. Sedangkan luas daerah yang kedua dimulai dari interval -1 sampai 2 , sedangkan persamaan garis yang membatasinya adalah $y = f(x) = -\frac{1}{2}x - 1$ dan $y = g(x) = x - 4$.

Dengan menggunakan konsep integral tentu, maka luas bidang 1 dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \int_a^b f(x) - g(x) dx \\
 &= \int_{-4}^{-1} \left(-\frac{1}{2}x - 1 \right) - (2x - 7) dx \\
 &= \int_{-4}^{-1} \left(-\frac{5}{2}x + 6 \right) dx \\
 &= \left[-\frac{5}{4}x^2 + 6x \right]_{-4}^{-1} \\
 &= \left[-\frac{5}{4}(-1)^2 + 6(-1) \right] - \left[-\frac{5}{4}(-4)^2 + 6(-4) \right] \\
 &= \left[-\frac{29}{4} \right] - \left[-\frac{176}{4} \right] \\
 &= \frac{147}{4} \text{ Satuan Luas}
 \end{aligned}$$

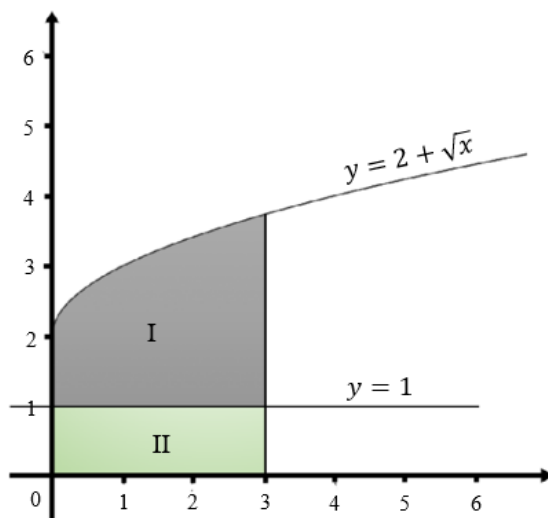
Selanjutnya untuk dapat memahami penggunaan dari aturan untuk menghitung luas daerah di antara dua kurva, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 1

Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 2 + \sqrt{x}$ dan $y = 1$ dengan $x = 0$ dan $x = 3$.

Penyelesaian

Sebelum menyelesaikan masalah tersebut, sketsakan grafik fungsi $y = 2 + \sqrt{x}$ dan $y = 1$ dengan $x = 0$ dan $x = 3$. Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar berikut ini.



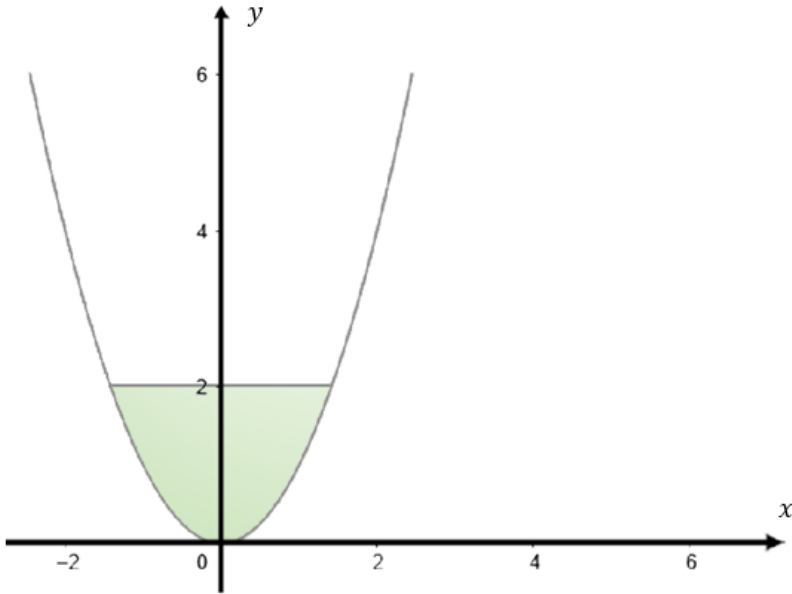
Daerah yang dibentuk oleh kurva $y = 2 + \sqrt{x}$ dengan batas $x = 0$ dan $x = 3$ adalah daerah I dan daerah II, dan daerah II dibentuk oleh kurva $y = 1$ dengan batas $x = 0$ dan $x = 3$. Jadi luas daerah I adalah luas daerah yang dibentuk oleh kurva $y = 2 + \sqrt{x}$ dengan batas $x = 0$ dan $x = 3$ dikurangi luas daerah II dengan batas $x = 0$ dan $x = 3$. Selanjutnya akan dihitung luasnya dengan menggunakan aturan integral tertentu,

$$\begin{aligned} \int_0^3 \left((2 + \sqrt{x}) - 1 \right) dx &= \int_0^3 (1 + \sqrt{x}) dx \\ &= \left[x + \frac{2}{3} x\sqrt{x} \right]_0^3 \end{aligned}$$

$$= 3 + 2\sqrt{3}$$

Contoh 2

Hitunglah luas daerah yang diarsir pada gambar berikut ini.

**Penyelesaian****Cara I:**

Jika kita perhatikan daerah yang diarsir dibentuk oleh grafik fungsi $y = 2$ dan $y = x^2$ dengan $x = -\sqrt{2}$ dan $x = \sqrt{2}$. Oleh karena itu, luas daerah tersebut dapat kita hitung berdasarkan sumbu X .

$$L = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (f_1(x) - f_2(x)) dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2) dx \\ &= \left[2x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= \left(2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) - \left(-2\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \\ &= 4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ &= \frac{8}{3} \sqrt{2} \end{aligned}$$

Cara II:

Kita dapat menghitung luas daerah yang diarsir tersebut berdasarkan sumbu Y , yaitu dengan cara membawa fungsi $y = x^2$ menjadi $x = \sqrt{y}$. Karena luas di atas sumbu Y sama dengan luas di bawah sumbu Y dengan grafik yang digunakan untuk membentuk daerah yang diarsir di atas sumbu Y yaitu $x = g(y)$, maka untuk menghitung luas daerah yang diarsir terhadap sumbu Y yaitu $2x = 2g(y)$ dengan $y = 0$ dan $y = 2$.

$$\begin{aligned} L &= \int_0^2 2[g(y)] dy = \int_0^2 2[\sqrt{y}] dy \\ &= \left[\frac{4}{3} y \sqrt{y} \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} \sqrt{2} \end{aligned}$$

Contoh 3

Tentukan luas daerah yang di batasi oleh kurva $y = x^2 - 2$ dan $y = x + 4$.

Penyelesaian

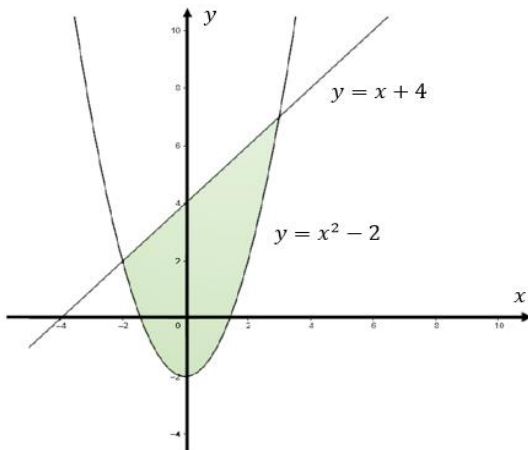
Yang harus kita lakukan pertama kali adalah menentukan titik-titik potong kurva-kurva tersebut. Jadi kita mencari akar-akar persamaan $x^2 - 2 = x + 4$ dan diperoleh:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

$$x = -2 \text{ dan } x = 3$$

Berikut gambar dari dua grafik yang diberikan.



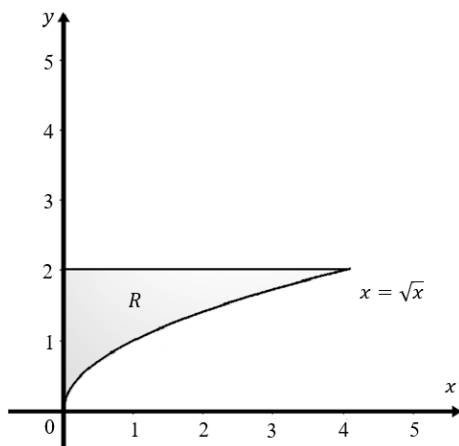
Selanjutnya mencari luas daerah yang dibantu oleh dua kurva yaitu dengan menghitung integralnya:

$$\int_{-2}^3 (y_1 - y_2) dx = \int_{-2}^3 [(x + 4) - (x^2 - 2)] dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-2}^3 (-x^2 + x + 6) dx \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_{-2}^3 \\
&= \left(-9 + \frac{9}{12} + 18 \right) - \left(\frac{8}{3} + 2 - 12 \right) \\
&= \frac{27}{16} - \frac{16}{6} + 19 \\
&= \frac{125}{16}
\end{aligned}$$

Contoh 4

Hitunglah luas daerah yang di arsir pada gambar berikut ini.



Penyelesaian:

Cara I

Menghitung luas daerah R sesuai gambar 16 terhadap sumbu x , dan kita akan menggunakan dua fungsi yakni $y = 2$, dan $y = \sqrt{x}$. Melalui perhitungan integral tentu kita dapat memperoleh luas daerah R .

$$\begin{aligned}\int_0^4 (2 - \sqrt{x}) dx &= \left[2x - \frac{2}{3} x\sqrt{x} \right]_0^4 \\ &= 8 - \frac{16}{3} \\ &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

Cara II

Menghitung luas daerah R terhadap sumbu y , dimana daerah tersebut berada di bawah kurva $x = y^2$ dan dibatasi oleh selang (interval) $0 \leq y \leq 2$, sehingga melalui integral sifat integral tentu akan diperoleh luas daerah R sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\int_0^2 (y^2) dy &= \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

Contoh 5

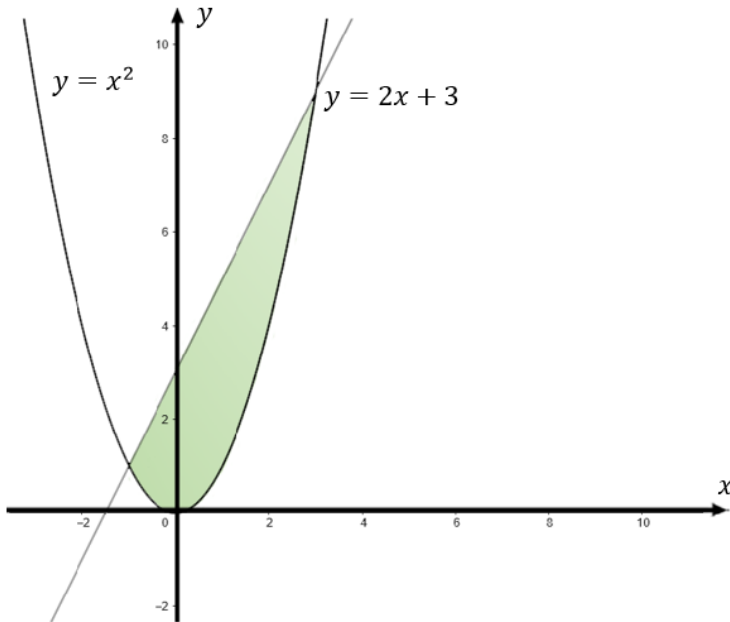
Gambarkanlah daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva yang persamaannya diketahui $y = 2x + 3$ dan $y = x^2$. Susunlah integral yang sesuai dan kemudian hitunglah luas daerah yang dibentuk oleh kurva-kurva tersebut!

Pembahasan:

Pertama adalah menentukan titik-titik potong kurva-kurva tersebut. Jadi kita mencari akar-akar persamaan $x^2 = 2x + 3$ dan diperoleh:

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ (x - 3)(x + 1) &= 0 \\ x &= -1 \text{ dan } x = 3\end{aligned}$$

Berikut gambar dari grafik fungsi yang diberikan:



Luas daerah yang dibentuk oleh dua kurva yaitu dengan menghitung integralnya, yakni sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 L &= \int_{-1}^3 (y_1 - y_2) dx = \int_{-1}^3 [(2x + 3) - (x^2)] dx \\
 &= \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 \\
 &= (-9 + 9 + 9) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) \\
 &= 11 - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{32}{3}
 \end{aligned}$$

RANGKUMAN

Dari pembahasan yang berkaitan dengan luas bidang datar antara dua kurva ada beberapa hal yang perlu diperhatikan diantaranya sebagai berikut:

1. Jika permasalahannya disajikan dengan gambar atau kurva, cermatilah hal-hal yang diketahui yang dapat digunakan dalam menyelesaikan permasalahan tersebut.
2. Jika dalam permasalahannya hanya diberikan beberapa komponen seperti titik-titik, maka terlebih dahulu tentukanlah persamaan kurva atau fungsinya dan selanjutnya sketsalah persamaan kurva atau fungsi yang telah diperoleh untuk menentukan mana daerah atau bidang yang akan dicari luasnya.
3. Andaikan $y = f(x)$ menyatakan suatu kurva pada bidang XY dan andaikan fungsi y kontinu pada interval $[a,b]$.
 - a. jika $f(x) \geq 0$, untuk semua x dalam $[a,b]$, andaikan R adalah daerah yang dibatasi kurva $y = f(x)$, sumbu x , garis $x = a$ dan garis $x = b$, luas daerah R dapat ditentukan dengan aturan sebagai berikut:

$$A(R) = \int_a^b f(x)dx$$

- b. jika $f(x) \leq 0$, untuk semua x dalam $[a,b]$, andaikan R adalah daerah yang dibatasi kurva $y = f(x)$, sumbu x , garis $x = a$ dan garis $x = b$, luas daerah R dapat ditentukan dengan aturan sebagai berikut:

$$A(R) = - \int_a^b f(x)dx$$

4. suatu kurva pada bidang XY dan andaikan fungsi y kontinu pada interval $[a,b]$.

- a. jika $f(y) \geq 0$, untuk semua y dalam $[a,b]$, andaikan R adalah daerah yang dibatasi kurva $x = f(y)$, sumbu y , garis $y = a$ dan garis $y = b$, luas daerah R dapat ditentukan dengan aturan sebagai berikut:

$$A(R) = \int_a^b f(y)dy$$

- b. jika $f(y) \leq 0$, untuk semua y dalam $[a,b]$, andaikan R adalah daerah yang dibatasi kurva $x = f(x)$, sumbu y , garis $y = a$ dan garis $y = b$, luas daerah R dapat ditentukan dengan aturan sebagai berikut:

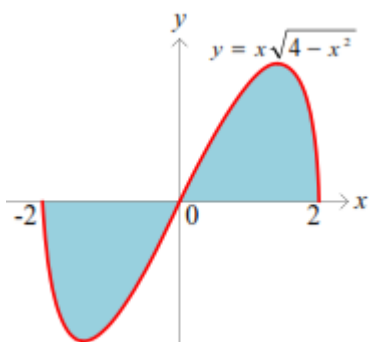
$$A(R) = - \int_a^b f(y)dy$$

5. Dalam menyelesaikan permasalahan luas bidang antara dua kurva, maka persamaan yang akan digunakan adalah:

$$L_1 = \int_a^b f(x) - g(x)dx$$

LATIHAN

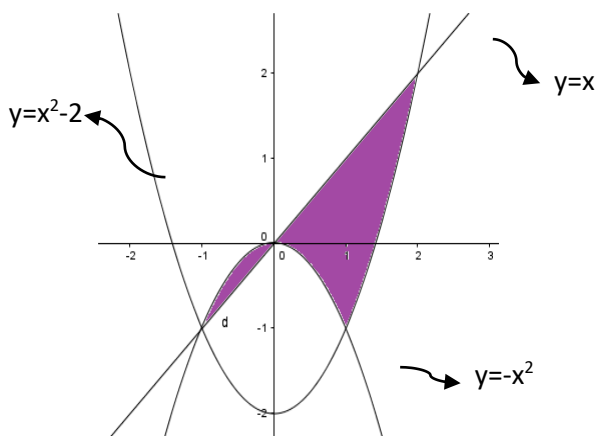
1. Tentukan luas bidang datar yang dibatasi oleh $y = 2x^2 + 10$; $y = 4x + 16$; $x = -2$ dan $x = 5$, serta berikan alasan mengapa memilih konsep tersebut untuk menyelesaikannya.
2. Perhatikan gambar di bawah ini!



Identifikasi konsep apakah yang dapat digunakan untuk menghitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva tersebut!

Kemudian nyatakan alasan dari pemilihan konsep tersebut!

3. Perhatikan gambar bidang datar dan selesaikannya di bawah ini



$$\begin{aligned}
 Luas &= L_1 + L_2 \\
 &= \int_1^2 [x - (-x^2)]dx + \int_0^{-1} [(x^2 - 2) - x]dx \\
 &= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{-1} \\
 &= \left[\frac{14}{3} - \frac{5}{6} \right] + \left[\frac{7}{6} - 0 \right] \\
 &= \left[\frac{23}{6} + \frac{7}{6} \right] = \frac{30}{6} = 5 \text{ satuan luas}
 \end{aligned}$$

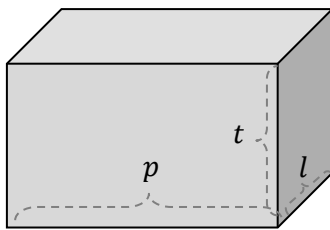
Apakah selesai yang disajikan sudah benar?

- a. Jika ya, maka tulis ulanglah jawaban tersebut dilembar jawabanmu
 - b. Jika tidak, nyatakan salahnya dimana dan buat jawaban yang benarnya.
4. Sebuah persegi panjang yang dibatasi oleh sumbu-sumbu koordinat, garis $x = 4$ dan $y = 8$ terbagi menjadi dua bagian oleh parabola $y = x^2$.
- a. Gambarlah grafiknya!
 - b. Tentukan konsep apa yang dapat digunakan untuk menghitung luas bagian persegi panjang tersebut dengan disertai alasannya!
 - c. Jika dinyatakan bahwa luas dari dua bagian persegi panjang tersebut adalah sama. Tentukan apakah pernyataan tersebut bernilai benar?
 - Jika ya, maka tulis ulanglah jawaban tersebut dilembar Jawabanmu

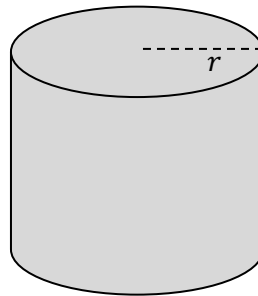
- Jika tidak, nyatakan salahnya dimana dan buat jawaban yang benarnya.
5. Diberikan sebuah daerah yang dibentuk oleh kurva $y = 6x - x^2$, maka:
- a. Hitunglah luas daerah yang dibentuk oleh kurva tersebut terhadap sumbu X .
 - b. Tentukan titik potong kurva tersebut dengan kurva $y = x^2$. Selanjutnya jika kurva $y = x^2$ membagi daerah yang dibentuk oleh kurva $y = 6x - x^2$ menjadi dua bagian, maka tentukan luas perbandingannya.

6.2 Volume Benda Putar

Sama halnya dengan menentukan luas suatu bidang datar beraturan, menentukan volume suatu bangun ruang beraturan seperti balok, tabung, dan lain-lain juga tidaklah sulit. Perhatikan gambar di bawah ini.



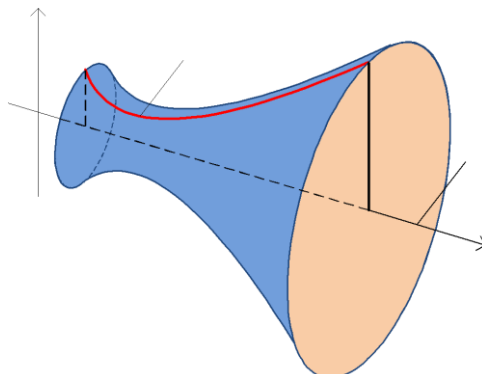
$$V = p \times l \times t$$



$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Gambar 6. 13

Akan sangat mudah untuk menentukan berapa volume dari benda pada gambar di atas. Hal ini dikarenakan benda di atas memiliki persamaan atau rumus yang sudah baku. Tapi, bagaimana jika bangun ruang tersebut berbetuk tak beraturan? Dapatkah kamu menentukan volumenya? Perhatikan gambar berikut:



Gambar 6.14

Untuk menjawab pertanyaan tersebut, perhatikan dan pahami penjabaran materi berikut.



Gambar 6.15

Suatu hari Budi membeli sebuah guci untuk hadiah ulang tahun Ibu. Guci yang dibeli Budi seperti terlihat pada gambar 6.15 di atas. Sambil membawa guci tersebut untuk diserahkan ke ibunya, Budi berpikir, kira-kira berapakah isi (volume) dari guci ini ya? Karena Budi adalah mahasiswa Pendidikan Matematika, maka

dia berpikir isi guci tersebut akan sama dengan isi dari tabung yang memiliki tinggi yang sama dengan guci tersebut. Perhatikan gambar tabung di atas. Selanjutnya sampailah Budi kerumah, dan guci tersebut langsung diserahkan ke ibu.

Berdasarkan permasalahan tersebut, apakah yang dipikirkan oleh Budi “jika volume atau isi guci tersebut sama dengan volume atau isi tabung sudah benar? Identifikasilah bagaimanakah menentukan volume guci tersebut? Apakah cara menentukan volume guci tersebut sama dengan menentukan volume tabung?

Untuk menentukan volume benda putar dari bentuk yang tidak beraturan atau yang belum diketahui rumus volumenya, maka ada beberapa pendekatan yang bisa dilakukan. Dalam menentukan volume dari benda-benda tersebut, cara yang dapat kita lakukan adalah membagi benda putar tersebut menjadi partisi-partisi. Hal ini ini juga dilakukan dalam menentukan luas bidang datar pada pembahasan sebelumnya. Tetapi, dalam menentukan volume benda putar ini, yang harus diperhatikan adalah bagaimana bentuk partisi yang akan dihasilkan. Hal ini dikarenakan, bentuk partisi yang akan dihasilkan akan menentukan metode atau pendekatan yang akan digunakan dalam menentukan volume benda putar tersebut.

Berdasarkan bentuk partisi yang dihasilkan, dari beberapa referensi yang sudah ada dapat dinyatakan bahwa ada tiga metode atau pendekatan yang dapat digunakan, diantaranya; metode cakram, metode cincin, dan metode kulit tabung. Perjabaran dari

ketiga metode tersebut dapat diperhatikan pada pembahasan di bawah ini.

6.2.1 Metode Cakram

Metode cakram merupakan salah satu pendekatan yang dihasilkan dari bentuk partisi yang digunakan. Mengapa dinamakan metode cakram, lebih disebabkan oleh bentuk partisi yang dihasilkan berbentuk cakram. Apakah kalian pernah memperhatikan cakram yang digunakan pada salah satu cabang olahraga atau cakram yang terdapat dimasing kendaraan bermotor kalian!. Perhatikan gambar cakram berikut:



Gambar 6.16

Untuk memahami bagaimana menentukan volume benda putar dengan menggunakan metode cakram, perhatikan permasalahan di bawah ini.

Suatu hari Andi menemani Ibunya ke pasar. Sesampainya di pasar, ibu Andi membeli ketimun. Belanjaan yang telah dibeli oleh ibu Andi diserahkan ke Andi untuk dibawa. Sambil membawa barang belanjaan ibunya yang berupa ketimun tersebut, Andi

berguman: berapa kira-kira isi dari satu buah ketimun ini ya? Mungkin isi dari ketimun ini akan sama dengan sebuah tabung yang di dalamnya diisi air.

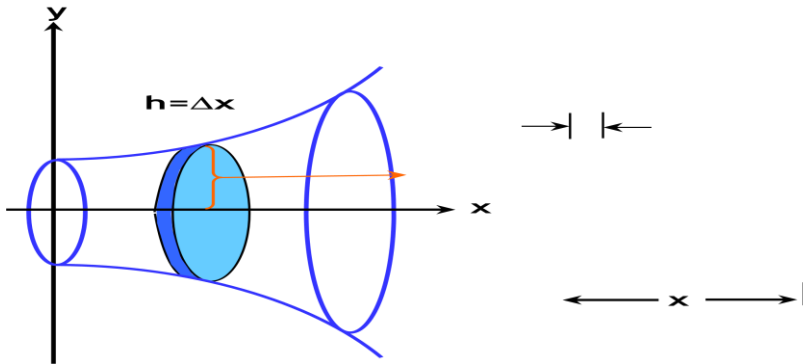
Sebelum memulai untuk membantu Andi dalam menentukan volume ketimun dan tabung, maka terlebih dahulu kalian harus mengetahui bagaimana cara menggambarkan kurva kuadrat. Oleh sebab itu, gunakanlah pengetahuan tersebut untuk menyelesaikan permasalahan berikut, yang pada akhirnya kalian juga akan dapat menyelesaikan masalah sebelumnya. Perhatikan permasalahan berikut.

Sebuah pesawat bergerak dengan kecepatan konstan membentuk lintasan yang dapat dinyatakan dengan $y = x^2 + 1$. Pergerakan pesawat tersebut dibatasi dari titik $(0, 5)$, dan pergerakan pesawat tersebut diputar mengelilingi sumbu- x sejauh 360° . Berapakah volume yang terjadi dari perputaran pergerakan pesawat tersebut?.

Untuk menyelesaikan persoalan di atas, maka ada beberapa langkah yang dapat diikuti, diantaranya sebagai berikut:

1. Gambarlah lintasan yang telah dilewati oleh pesawat tersebut.

Lintasan pesawat membentuk persamaan $y = x^2 + 1$. Untuk menggambar lintasan tersebut, maka ingat kembali konsep menggambar sebuah kurva kuadrat. Selanjutnya tentukanlah daerah yang merupakan volume yang dihasilkan dari perputaran lintasan pesawat terhadap sumbu- x . Jika kalian benar maka gambarnya akan seperti di bawah ini:



Gambar 6.17

2. Buatlah sebuah partisi. Dari gambar di atas, kita sudah membuat sebuah partisi yang berbentuk cakram dengan ketebalan partisi dianalogikan sebagai tinggi sebuah bangun ruang yang terbentuk yaitu $h = \Delta x$, dan berjari-jari $r = x^2 + 1$.
3. Tentukan volume partisi berbentuk cakram yang terbentuk. Karena partisi berbentuk cakram, maka volume partisi tersebut dapat ditentukan dengan menggunakan volume tabung, yaitu $V = \pi r^2 h$. Substitusilah masing-masing apa-apa saja yang sudah diketahui ke dalam rumus volume tabung tersebut.
 Karena yang sudah diketahui; $h = \Delta x$, dan berjari-jari $r = x^2 + 1$, maka volume partisi berbentuk cakram tersebut adalah: $V \approx \pi(x^2 + 1)^2 \Delta x$.
4. Tentukanlah volume benda putar yang terbentuk dari lintasan pesawat tersebut dengan cara menjumlahkan semua partisi yang terbentuk. Jumlah dari semua partisi dapat dinyatakan sebagai berikut: $V \approx \sum \pi(x^2 + 1)^2 \Delta x$

5. Gunakan konsep integral tentu untuk menentukan volume benda putar yang terbentuk dari lintasan pesawat tersebut. Jumlah dari semua partisi yang terbentuk akan mendekati dari panjang lintasan yang dilewati. Karena panjangnya lintasan yang dilewati adalah (0,5), maka volume benda putar yang terbentuk dari lintasan pesawat tersebut adalah: $V = \int_a^b \pi (x^2 + 1)^2 dx$

Sehingga:

$$V = \int_a^b \pi (x^2 + 1)^2 dx$$

$$V = \int_0^5 \pi (x^2 + 1)^2 dx$$

$$V = \pi \int_a^b (x^2 + 1)^2 dx$$

$$V = \pi \int_a^b (x^4 + 2x^2 + 1) dx$$

$$V = \pi \left| \frac{1}{5} x^5 + \frac{2}{3} x^3 + x \right|_0^5$$

$$V = \pi \left\{ \left(\frac{1}{5} (5)^5 + \frac{2}{3} (5)^3 + (5) \right) - \left(\frac{1}{5} (0)^5 + \frac{2}{3} (0)^3 + (0) \right) \right\}$$

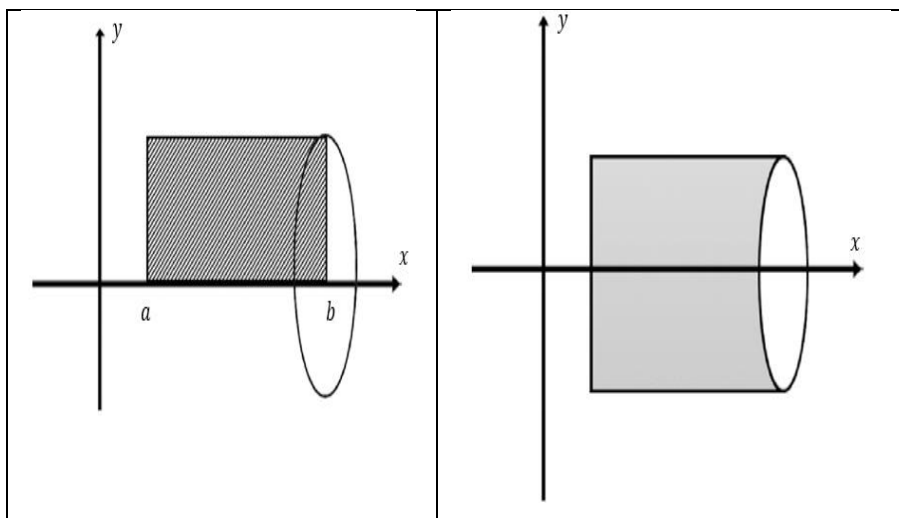
$$V = \pi \left\{ \left(625 + \frac{250}{3} + 5 \right) - (0) \right\}$$

$$V = \pi \left\{ \frac{2140}{3} \right\}$$

$$V = 713 \frac{1}{3} \pi \text{ Satuan Volume}$$

Secara matematis, menentukan volume benda putar dengan menggunakan metode cakram dapat dinyatakan sebagai berikut:

Misalnya garis tersebut adalah sumbu- x , dan andaikan luas penampang di x adalah $A(x)$ dengan $a \leq x \leq b$ dan $h = \Delta x = [a, b]$. r merupakan jari-jari, dan jari-jari yang dimaksud disini merupakan sebuah fungsi konstan, sehingga membentuk sebuah persegi panjang dengan interval $a \leq x \leq b$. Jika persegi panjang tersebut diputar terhadap sumbu $-x$ sejauh 360° , maka akan diperoleh sebuah tabung. Untuk lebih jelasnya, perhatikan ilustrasi gambar di bawah ini.



Gambar 6.18

Berdasarkan gambar 6.18 di atas, dapat dinyatakan aturan untuk menentukan volume benda putar dengan menggunakan metode cakram yaitu:

$$V = \int_a^b A(x) dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Selanjutnya agar dapat lebih memahami implementasi dan penggunaan metode cakram dalam penyelesaian permasalahan yang diberikan, perhatikan contoh berikut ini

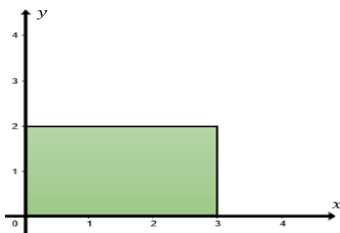
Contoh 1

Sebuah daerah, misal kita namakan R terbentuk dari kurva $y = 2$, $x = 0$, dan $x = 3$ yang diputar mengelilingi sumbu x sejauh 360° .

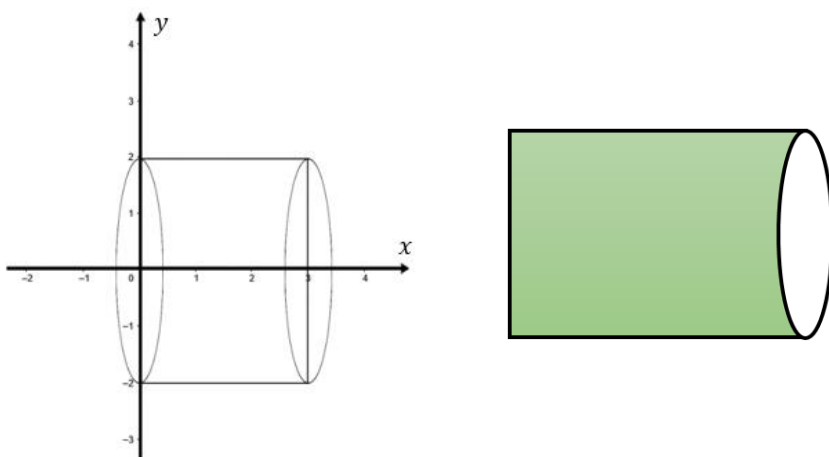
- Buatlah sketsa dari daerah tersebut!
- Tentukan konsep apa yang dapat digunakan untuk menghitung volume dari daerah R apabila diputar 360° terhadap sumbu x , kemudian terhadap sumbu y !
- Selanjutnya jika dinyatakan volume daerah R yang diputar 360° terhadap sumbu x sama dengan volume daerah R yang diputar 360° terhadap sumbu y . Tentukan apakah pernyataan tersebut bernilai benar?
 - Jika ya, nyatakan proses untuk menemukan berapa volumenya!
 - Jika tidak, nyatakan alasannya. Kemudian nyatakan proses untuk menemukan berapa volumenya!

Penyelesaian

- Sketsa daerah R yang dibatasi oleh kurva $y = 2$, $x = 0$, dan $x = 3$.



- b. Jika gambar pada point a diputar mengelilingi sumbu x , maka akan dibentuk sebuah tabung seperti gambar di bawah ini. Hal yang sama akan terbentuk, jika gambar pada point a diputar mengelilingi sumbu y , maka akan terbentuk sebuah tabung juga. Dari pemaparan tersebut, dapat kita nyatakan untuk menentukan volume dari daerah R, baik yang dipuat mengelilingi sumbu x atau sumbu y , dapat menggunakan metode cakram.



- c. Volume daerah R yang mengelilingi sumbu x dapat ditentukan dengan aturan:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^3 A(x) dx = \pi \int_0^3 (f(x))^2 dx \\
 &= \pi \int_0^3 (2)^2 dx \\
 &= [4x\pi]_0^3 \\
 &= 12\pi \approx 37,7 \dots \dots \dots \text{selesaian 1}
 \end{aligned}$$

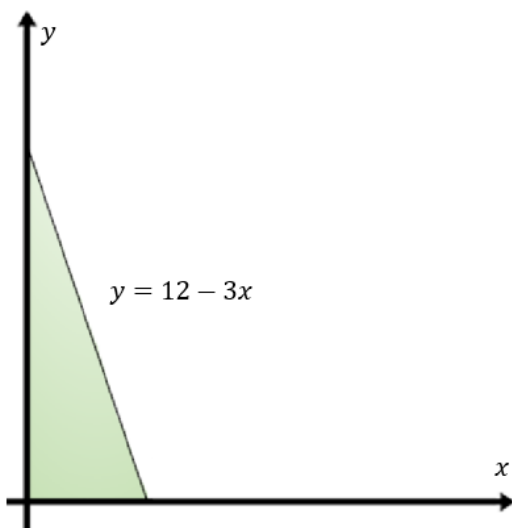
Sedangkan volume untuk daerah R yang mengeliling sumbu y , dapat ditentukan dengan aturan:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^2 A(y) dy = \pi \int_0^2 (f(y))^2 dy \\
 &= \pi \int_0^2 (3)^2 dy \\
 &= [9y\pi]_0^2 \\
 &= 18\pi \approx 56,52 \dots \dots \dots \text{selesaian 2}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan selesaian 1 dan selesaian 2 tersebut, dapat dinyatakan bahwa volume dari daerah R yang diputar mengelilingi sumbu x tidak sama dengan volume dari daerah yang diputar mengelilingi sumbu y .

Contoh 2

Perhatikan gambar di bawah ini!



Dinyatakan bahwa volume dari daerah yang diarsir apabila di putar terhadap sumbu x dan sumbu y adalah sama. Tentukan, apakah pernyataan tersebut bernilai benar?

- Jika ya, nyatakan proses untuk menemukan berapa volumenya!
- Jika tidak, nyatakan alasannya. Kemudian nyatakan proses untuk menemukan berapa volumenya!

Penyelesaian

Jika diputar mengelilingi sumbu x , maka volumenya:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 A(x) dx = \pi \int_0^4 [(f(x))^2] dx \\ &= \pi \int_0^4 (12 - 3x)^2 dy \\ &= \pi \int_0^4 (144 - 72x + 9x^2) dx \\ &= [144x - 36x^2 + 3x^3]_0^4 \pi \\ &= 192\pi \approx 603,43 \dots\dots\dots \text{selesaian 1} \end{aligned}$$

Jika diputar mengelilingi sumbu y , maka volumenya:

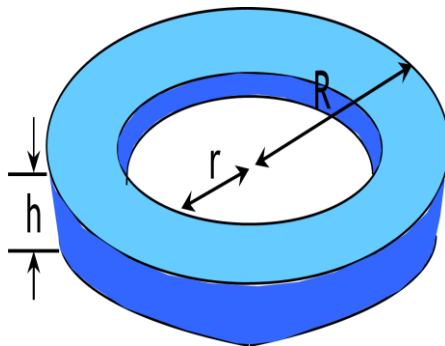
$$\begin{aligned} V &= \int_0^{12} A(y) dy = \pi \int_0^{12} [(g(y))^2] dy \\ &= \pi \int_0^{12} \left(4 - \frac{1}{3}\right)^2 dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \pi \int_0^{12} \left(16 - \frac{8}{3}x + \frac{1}{9}x^2 \right) dx \\ &= \left[16x - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{27}x^3 \right]_0^{12} \pi \\ &= 64\pi \approx 201,14 \dots \dots \dots \text{selesaian 2} \end{aligned}$$

Berdasarkan selesaian 1 dan selesaian 2 tersebut, dapat dinyatakan bahwa volume dari daerah R yang diputar mengelilingi sumbu x tidak sama dengan volume dari daerah yang diputar mengelilingi sumbu y .

6.2.2. Metode Cincin

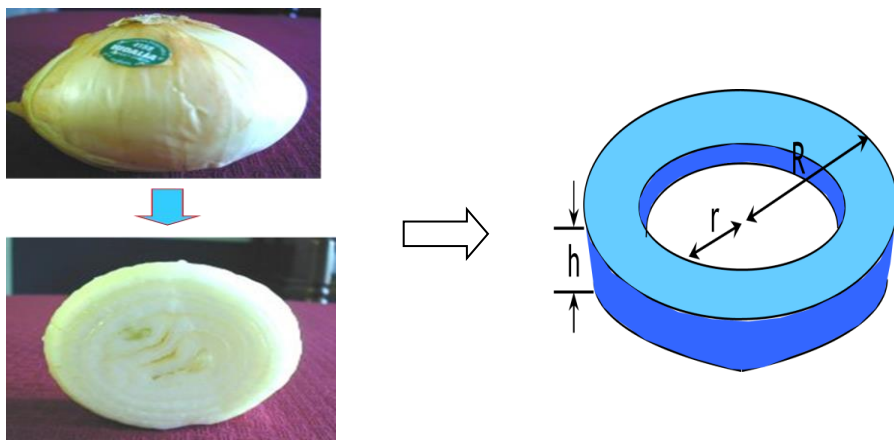
Metode cincin merupakan salah satu pendekatan yang dihasilkan dari bentuk partisi yang digunakan. Mengapa dinamakan metode cincin, lebih disebabkan oleh bentuk partisi yang dihasilkan berbentuk cincin. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 6.19

Untuk memahami bagaimana menentukan volume benda putar dengan menggunakan metode cincin, perhatikan permasalahan di bawah ini.

Suatu hari Andi menemani Ibunya ke pasar. Sesampainya di pasar, ibu Andi membeli bawang bombai. Belanjaan yang telah dibeli oleh ibu Andi diserahkan ke Andi untuk dibawa. Sambil membawa barang belanjaan ibunya yang berupa bawang bombai tersebut, Andi berguman: berapa kira-kira isi dari satu buah bawang bombai ini ya? Mungkin isi dari bawang bombai ini akan sama dengan sebuah tabung yang di dalamnya diisikan air. Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar pada halaman berikut:



Gambar 6.20

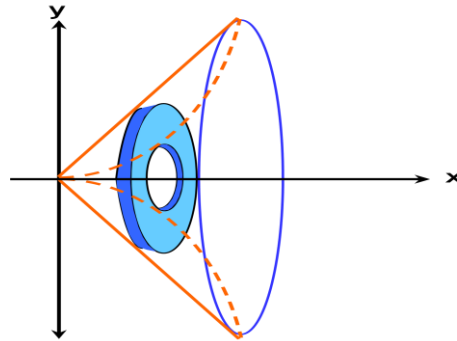
Coba kalian amati gambar tersebut, apakah untuk menentukan volume dari bawang bombai di atas sama dengan menentukan volume tabung?. Selanjutnya identifikasikanlah bagaimana cara menentukan volume bawang bombai tersebut?

Sebelum memulai untuk membantu Andi dalam menentukan volume bawang bombai dan tabung, maka terlebih dahulu kalian harus mengetahui bagaimana cara menggambarkan kurva kuadrat. Oleh sebab itu, gunakanlah pengetahuan tersebut untuk menyelesaikan permasalahan berikut, yang pada akhirnya kalian juga akan dapat menyelesaikan masalah sebelumnya. Perhatikan permasalahan berikut.

Dua buah benda bergerak dengan kecepatan konstan dan membentuk lintasan yang dinyatakan dengan $y = x^2$ dan $y = 2x$. Pergerakan dua buah benda tersebut diputar mengelilingi sumbu- x sejauh 360° . Berapakah volume yang terjadi dari perputaran pergerakan dua buah benda tersebut?

Untuk menyelesaikan persoalan di atas, maka ada beberapa langkah yang dapat diikuti, diantaranya sebagai berikut:

1. Gambarlah lintasan yang telah dilewati oleh dua buah benda tersebut. Untuk menggambar lintasan tersebut, maka ingat kembali konsep menggambar sebuah kurva kuadrat. Selanjutnya tentukanlah daerah yang merupakan volume yang dihasilkan dari perputaran lintasan pesawat terhadap sumbu- x . Jika kalian benar maka gambarnya akan seperti di bawah ini:

**Gambar 6. 21**

2. Tentukan sebuah partisi. Dari gambar di atas, kita sudah membuat sebuah partisi yang berbentuk cincin dengan ketebalan partisi dianalogikan sebagai tinggi sebuah bangun ruang yang berbentuk yaitu: $h = \Delta x$, dengan jari-jari $R = 2x$ (jarak dari lingkaran luar ke titik pusat lingkaran) dan $r = x^2$ (jarak dari lingkaran dalam ke titik pusat lingkaran).
3. Tentukan volume partisi berbentuk cakram yang terbentuk. Karena partisi berbentuk cincin, maka volume partisi tersebut dapat ditentukan dengan menggunakan volume tabung, yaitu: $V = \pi r^2 h$. Substitusikanlah masing-masing yang sudah diketahui ke dalam rumus volume tabung tersebut.

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi(R^2 - r^2) h$$

$$V = \pi((2x)^2 - (x^2)^2) \Delta x$$
4. Tentukanlah volume benda putar yang terbentuk dari lintasan dua buah benda dengan cara menjumlahkan semua partisi yang

terbentuk. Jumlah dari semua partisi dapat dinyatakan dengan: $V \approx \pi((2x)^2 - (x^2)^2) \Delta x$

5. Gunakanlah konsep integral tentu untuk menentukan volume benda putar yang terbentuk dari lintasan dua buah tersebut. Jumlah dari semua partisi yang terbentuk akan mendekati dari panjang lintasan yang dilewati. Karena panjang lintasan yang dilewati adalah (a, b), maka volume benda putar yang terbentuk dari lintasan pesawat tersebut adalah :

$$V = \int_a^b \pi((2x)^2 - (x^2)^2) dx$$

Sehingga: $V = \int_a^b \pi((2x)^2 - (x^2)^2) dx$, jika panjang lintasannya adalah (0,5), maka:

$$V = \int_0^5 \pi((2x)^2 - (x^2)^2) dx$$

$$V = \pi \int_0^5 ((2x)^2 - (x^2)^2) dx$$

$$V = \pi \int_0^5 (4x^2 - x^4) dx$$

$$V = \pi \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^5$$

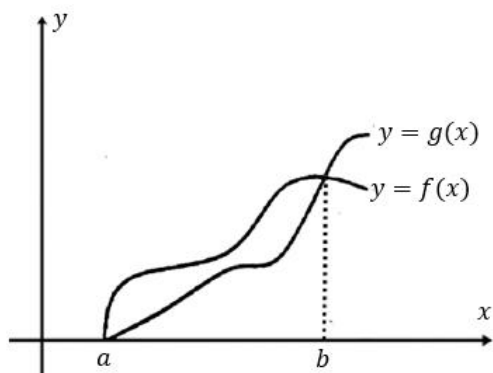
$$V = \pi \left\{ \left(\frac{4}{3}(5)^3 - \frac{1}{5}(5)^5 \right) - \left(\frac{4}{3}(0)^3 - \frac{1}{5}(0)^5 \right) \right\}$$

$$V = \pi \left\{ \left(\frac{500}{3} - 625 \right) - (0) \right\}$$

$$V = \pi \left\{ -\frac{1375}{3} \right\}$$

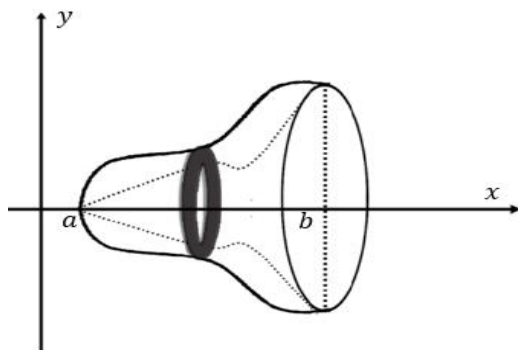
$$V = -\frac{1375}{3} \pi \text{ satuan volume}$$

Dengan pendekatan matematis, penjabaran dari metode cincin di atas dapat dinyatakan sebagai berikut:

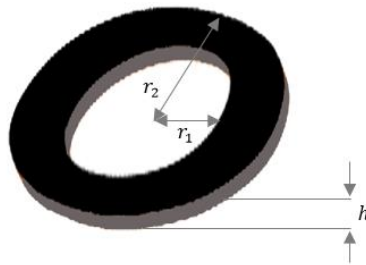


Gambar 6.22

Pada gambar 6.21 di atas, diketahui bahwa terdapat dua buah kurva yang saling berpotongan di suatu titik. Kedua kurva tersebut, membentuk sebuah daerah, dimana jika daerah yang terbentuk tersebut diputar mengelilingi sumbu x , maka akan diperoleh sebuah bangun ruang, yang terdapat dua jari – jari. Jari – jari pertama diperoleh dari kurva grafik fungsi $g(x)$ dan jari – jari kedua dari kurva grafik fungsi $f(x)$. Untuk lebih jelas, perhatikan gambar di bawah ini



Gambar 6.23



Gambar 6.24

Luas penampang di x adalah $A(x)$, dan $A(x)$ terbentuk oleh dua jari-jari yang memiliki fungsi $f(x)$ dan $g(x)$, dengan $a \leq x \leq b$ dan $h = \Delta x = [a, b]$, maka:

$$V = \pi(r_2^2 - r_1^2)h$$

Jadi, volume benda putar yang dibatasi $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, dan $x = b$ adalah:

$$V = \int_a^b A(x) dx = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx$$

Sebaliknya, volume benda putar yang dibatasi $x = p(y)$, $x = q(y)$, $y = a$ dan $y = b$ adalah:

$$V = \int_a^b A(y) dy = \pi \int_a^b [(p(y))^2 - (q(y))^2] dy$$

Untuk lebih memahami aplikasi, implementasi dan kegunaan dari penyelesaian dengan menggunakan metode cincin, perhatikan dan pahami contoh di bawah ini.

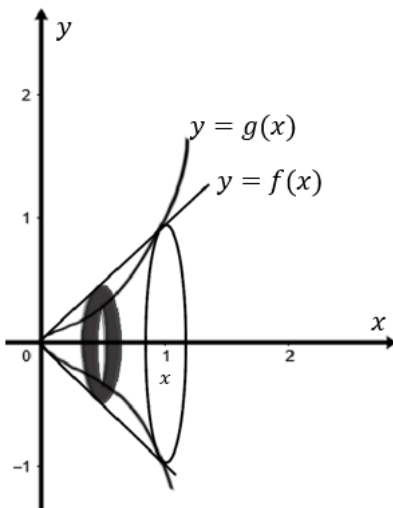
Contoh 1

Sebuah daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, $x = 0$, dan $y = x$ yang diputar mengelilingi sumbu x dan y .

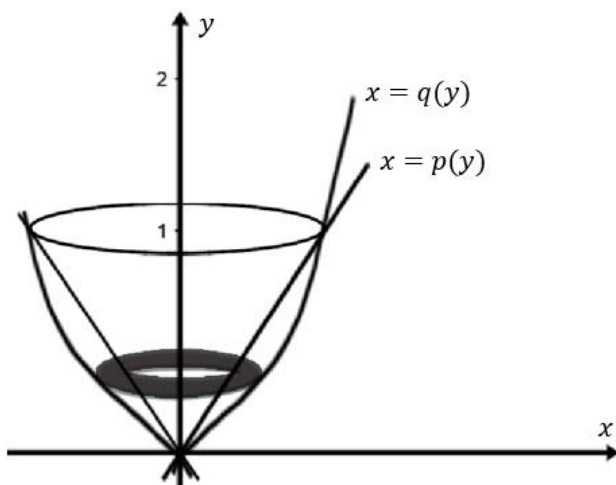
- d. Buatlah sketsa dari daerah tersebut!
- e. Tentukan konsep apa yang dapat digunakan untuk menghitung volume dari daerah tersebut apabila diputar 360° terhadap sumbu x , kemudian terhadap sumbu y !
- f. Selanjutnya jika dinyatakan volume daerah yang diputar 360° terhadap sumbu x sama dengan volume daerah yang diputar 360° terhadap sumbu y . Tentukan apakah pernyataan tersebut bernilai benar?
 - Jika ya, nyatakan proses untuk menemukan berapa volumenya!
 - Jika tidak, nyatakan alasannya. Kemudian nyatakan proses untuk menemukan berapa volumenya!

Penyelesaian

- a. Untuk daerah yang diputar mengelilingi sumbu x , digambarkan sebagai berikut!



Untuk daerah yang diputar mengelilingi sumbu y , digambarkan sebagai berikut



- b. Untuk menentukan volume dari benda putar terhadap sumbu x , kita dapat menggunakan metode cincin, dengan alasan, daerah benda putar tersebut dibentuk dari dua buah kurva, dengan aturan:

$$V = \int_a^b A(x) dx = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx$$

Sedangkan untuk volume benda putar yang berputar terhadap sumbu y , dapat ditentukan dengan aturan:

$$V = \int_a^b A(y) dy = \pi \int_a^b [(p(y))^2 - (q(y))^2] dy$$

- c. Volume jika diputar terhadap sumbu x

$$V = \int_0^1 A(x) dx = \pi \int_0^1 [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx$$

$$\begin{aligned} &= \pi \int_0^1 [(x)^2 - (x^2)^2] dx \\ &= \pi \int_0^1 [x^2 - x^4] dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{15} \pi \approx 0,42 \end{aligned}$$

Volume benda putar terhadap sumbu y

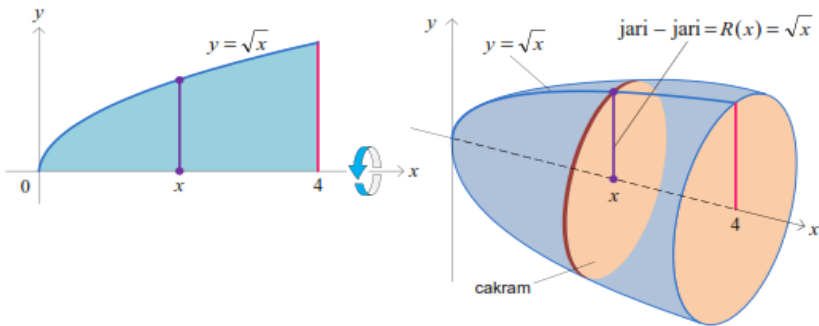
$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(y) dy = \pi \int_0^1 [(q(y))^2 - (p(y))^2] dy \\ &= \pi \int_0^1 [(\sqrt{y})^2 - (y)^2] dy \\ &= \pi \int_0^1 [y - y^2] dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6} \pi \approx 0,52 \end{aligned}$$

RANGKUMAN

1. Untuk menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan volume benda putar dengan menggunakan metode cakram, maka ada beberapa hal yang diperlu diperhatikan, diantaranya:
 - a. Pahami kembali cara menggambar atau mensketsa kurva fungsi kuadrat
 - b. Pahami kembali konsep pengintegralan tentu.
 - c. Identifikasilah hal-hal yang diketahui, dan gunakan rumus atau aturan cakram yang sudah dinyatakan di atas.
 - d. Metode cakram digunakan apabila volume benda putar dihasilkan oleh satu buah kurva.
2. Untuk menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan volume benda putar dengan menggunakan metode cakram, maka ada beberapa hal yang diperlu diperhatikan, diantaranya:
 - a. Pahami kembali cara menggambar atau mensketsa kurva fungsi kuadrat
 - b. Pahami kembali konsep pengintegralan tentu.
 - c. Identifikasilah hal-hal yang diketahui, dan gunakan rumus atau aturan cincin yang sudah dinyatakan di atas.
 - d. Metode cincin digunakan apabila volume benda putar yang terbentuk dibatasi oleh dua buah kurva.

LATIHAN

1. Carilah volume benda putar yang dihasilkan ketika bidang datar yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}$ dan garis-garis $y = 1$ dan $x = 4$, diputar terhadap garis $y = 1$, serta berikan alasan mengapa memilih konsep atau metode tersebut untuk menyelesaikannya.
2. Perhatikan gambar dan selesaian volume benda putar di bawah ini

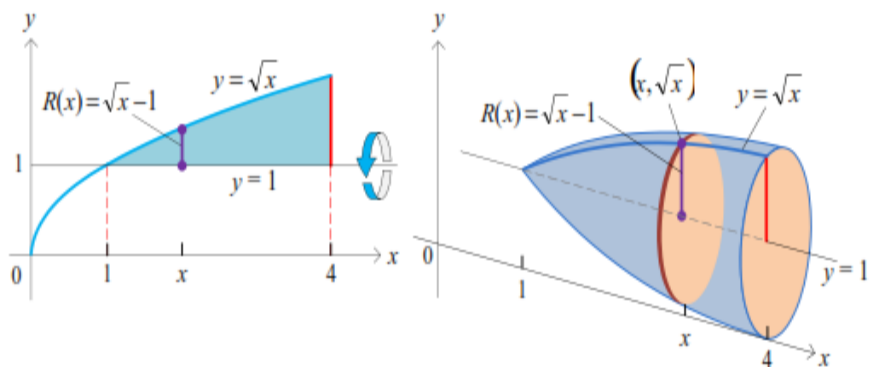


$$Volume = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi$$

Apakah selesai yang disajikan sudah benar?

- a. Jika ya, maka tulis ulanglah jawaban tersebut dilembar jawabanmu
- b. Jika tidak, nyatakan salahnya dimana dan buat jawaban yang benarnya.

3. Tentukan persamaan kurva dan persamaan garis dari sketsa kurva di bawah ini, dan kemudian tentukanlah volumenya!



DAFTAR PUSTAKA

- Erwin Kreyszig. 2011. *Advanced Engineering Mathematics*. New York: John Wiley & Sons, INC
- Gazali, W. dan Soedadyatmodjo. 2005. *Kalkulus*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- James Stewart. 2009. *Kalkulus jilid 1*. Jakarta: Salemba Teknika
- Koko Martono. 1999. *Kalkulus*. Jakarta: Erlangga
- Leithold, Louis. 1988. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik*. (Diterjemahkan oleh E. Hutahaean). Edisi Kelima Jilid 1. Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Mhd. Daud Pinem. 2015. *Kalkulus untuk Perguruan Tinggi*. Bandung: Rekayasa Sains
- Prayudi. 2006. *Kalkulus Fungsi Satu Variabel*. Yogyakarta: Graha Ilmu
- Ratna Dewi, dkk. 2016. *Matematika Teknik untuk Perguruan Tinggi*. Bandung: Rekayasa Sains
- Soemanar, 1999. *Kalkulus I*. Penerbit: Universitas Terbuka.
- Soemartojo, N. 1982. *Kalkulus*. Yogyakarta: Erlangga.
- Toni Hartono Bagio. 2010. *Kalkulus Dasar*. Surabaya: Universitas Narontama.
- Varberg, Purcell, Rigdon, 2010. “Kalkulus, Edisi Kesembilan, Jilid 1”, Erlangga. Jakarta.
- Warsona Johan & Wono Setyo. 2007. *Diktat kalkulus 1*. Bandung: Departemen matematika, Fakultas MIPA Universitas Teknologi Bandung.
- Wirpatman, dkk. 1977. *Matematika Dasar I*. Pekanbaru: Universitas Riau.
- Wardiman,.... *Hitung Integral*. Yogyakarta: Hanindita.

Buku Ajar Mata Kuliah Kalkulus Integral Berbasis Kemampuan Berpikir Kritis Matematis ini terdiri sebanyak 6 Bab. Bab 1 membahas terkait pengantar dasar integral, Bab 2 tentang integral tak tentu; Bab 3 tentang teknik integrasi; Bab 4 tentang aplikasi integral tak tentu; Bab 5 tentang teorema dasar integral tentu; Bab 6 tentang aplikasi integral tentu. Pada Bab 2 – 6 disajikan contoh soal dan latihan yang di susun berdasarkan indikator kemampuan berpikir kritis matematis yaitu: Kemampuan mengidentifikasi dan menjustifikasi konsep, yaitu kemampuan memberikan alasan terhadap penguasaan konsep; Kemampuan menghubungkan, yaitu kemampuan menemukan fakta, data, konsep dan menghubungkannya; Kemampuan menganalisis, yaitu kemampuan memilih dan menentukan informasi yang penting dari soal yang diberikan; Kemampuan mengevaluasi, yaitu kemampuan menemukan dan mendeteksi hal-hal yang penting dari konsep yang diberikan; Kemampuan memecahkan masalah, yaitu kemampuan memahami masalah, memilih strategi dan melaksanakan penyelesaian dari masalah yang diberikan serta dilengkapi dengan rangkuman.



UIR PRESS Universitas Islam Riau
Gedung Rektorat Universitas Islam Riau Lantai 3
Jl. Kaharuddin Nasution No. 113
Marpoyan 28284, Kota Pekanbaru, Riau, Indonesia
Telp : (0761) 674674, Fax : (0761) 674834
Email: uirpress@uir.ac.id

