PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE TIGA DENGAN MENGGUNAKAN METODE RUNGE-KUTTA ORDE EMPAT

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk

mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Diajukan oleh

Suci Mayanti
NPM. 166410800

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS ISLAM RIAU

2020

SURAT KETERANGAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan bahwa:

Nama : Suci Mayanti

NMP 166410800

Program Studi : Pendidikan Matematika

Telah selesai menyusun skripsi yang berjudul "Penyelesaian Persamaan Diferensial Orde-3 Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde-4"

Demikian surat keterangan ini dibuat untuk dipergunakan sebagaimana mestinya.

Pekanbaru, 2 November 2020

Pembimbing

Agus Dahlia, M.Si
NIDN. 1011088304

SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertanda bawah di bawah ini:

Nama: Suci Mayanti

NPM/NIM: 166410800

Lembaga Pendidikan: Universitas Islam Riau

Alamat: Jl. Bukit Barisan Perum Cendana III Blok E no 8

No. Handphone: 082169714936

Dengan ini saya menyatakan bahwa akan menaati dan tidak melanggar ketentuan peraturan perundang-undangan yang berlaku dan berkaitan dengan penerbitan rekomendasi riset/penelitian dari Dinas Penanaman modal dan Pelayanan Terpadu Satu Pintu (PTSP) Provinsi Riau.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya agar dapat dipergunakan sebagaimana mestinya.

Pekanbaru, 5 Januari 2021

Pembuat pernyataan

(Suci Mayanti)

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Suci Mayanti
NMP	: 166410800
Program Studi	: Pendidikan Matematika

Menyatakan bahwa yang tertulis di dalam skirpsi ini benar-benar hasil karya saya sendiri, bukan jiplakan dari karya tulis orang lain, baik sebagian atau seluruhnya. Pendapat atau temuan orang lain yang terdapat dalam skripsi ini dikutip atau dirujuk berdasarkan kode etik ilmiah. Apabila dikemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil jiplakan dari karya tulis orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan yang berlaku.

Demikianlah syarat pernyataan ini dibuat dengan sebenar-benarnya dan tidak ada paksaan dari pihak manapun.

Pekanbaru, 2 November 2020
Saya yang menyatakan

METERAI TEMPEL
TGL. 20
130AEAHF737337330
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Suci Mayanti
NPM. 166410800

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE TIGA MENGGUNAKAN METODE RUNGE-KUTTA ORDE EMPAT

Dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : Suci Mayanti
NMP : 166410800
Program Studi : Pendidikan Matematika

Pembimbing

Agus Dahlia, M.Si
NIDN. 1011088304

Mengetahui,

Ketua Program Studi
Pendidikan Matematika

Rezi Ariawan, M.Pd
NIDN. 1014058701

Skripsi ini telah diterima sebagai salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Islam Riau
Tanggal 9 Oktober 2020

Wakil Dekan Bidang Akademik
FKIP Universitas Islam Riau

Dra. Hj. Tity Hastuti, M.Pd
NIDN. [illegible]1095901

UNIVERSITAS ISLAM RIAU
UIR
PEKANBARU
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

SKRIPSI

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE TIGA DENGAN MENGGUNAKAN METODE RUNGE-KUTTA ORDE EMPAT

Dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama	: Suci Mayanti
NPM	: 166410800
Program Studi	: Pendidikan Matematika

Telah dipertahankan di depan penguji
Pada tanggal : 24 November 2020

Susunan Tim Penguji

Ketua

Agus Dahlia. M.Si
NIDN. 1011088304

Anggota Tim

Dr. Alzaber. M.Si
NIDN. 0004125903

Reza Ariawan. M.Pd
NIDN. 1014058701

Skripsi ini telah diterima sebagai salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Islam Riau
24 November 2020

Wakil Dekan Bidang Akademik
FKIP Universitas Islam Riau

UNIVERSITAS ISLAM RIAU
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

Dra. Hj. Tity Hastuti, M.Pd
NIDN. 0011095901

YAYASAN LEMBAGA PENDIDIKAN ISLAM (YLPI) RIAU
UNIVERSITAS ISLAM RIAU
Jalan Kaharuddin Nasution No. 113 P. Marpoyan Pekanbaru Riau Indonesia – Kode Pos: 28284
Telp. +62 761 674674 Fax. +62 761 674834 Website: www.uir.ac.id Email: info@uir.ac.id

F.A.3.10

KARTU BIMBINGAN TUGAS AKHIR
SEMESTER GANJIL TA 2020/2021

NPM : 166410800
Nama Mahasiswa : SUCI MAYANTI
Dosen Pembimbing : AGUS DAHLIA S.Si., M.Si
Program Studi : PENDIDIKAN MATEMATIKA
Judul Tugas Akhir : Penyelesaian Persamaan Differensial Orde-3 dengan Metode Runge-Kutta Orde-4
Judul Tugas Akhir (Bahasa Inggris) : Solving Third order Differential Equatons Use Fourth Order Runge-Kutta Method
Lembar Ke : 1

NO	Hari/Tanggal Bimbingan	Materi Bimbingan	Hasil / Saran Bimbingan	Paraf Dosen Pembimbing
1.	Selasa 29 Oktober 2019	Judul	Bimbingan Judul	
2.	Kamis 31 Oktober 2019	Proposal	Buat Proposal sesuai buku panduan	
3.	Jum'at 13 Desember 2019	Bab I	– Perbaiki Latar Belakang – Ubah rumusan masalah dan tujuan penelitian – Tambahkan simulasi perhitungan	
4.	Senin 30 Desember 2019	Bab II	– Tuliskan Bentuk umum PDB – Teori yang berkaitan tidak erlu dimasukkan	
5.	Senin 13 Januari 2020	Bab III	– Perbaiki teknik analisa – Perbaiki penulisan	
6.	Selasa 14 Januari 2020		Disetujui untuk diseminarkan proposal	
7.	Kamis 20 Februari 2020	Bab I	– Perbaiki latar belakang – Bagian simulasi penelitian dihapus	
8.	Selasa 10 Maret 2020	Bab II	– Perbaiki penulisan bab II – Pilih satu saja bentuk umum persamaan diferensial	
9.	Kamis 12 Maret 2020	Bab IV	Pelajari turunan parsial	

10.	Rabu 26 Agustus 2020	Bab IV	– Berikan Rujukan – Tulis penomoran persamaan – Darimana datang $b_3 = \frac{1}{3}$	
11.	Minggu 20 September 2020	Bab I - IV	Rapikan penulisan	
12.	Selasa 20 Oktober 2020		Disetujui untuk mengikuti ujian skripsi	

UURMEGHQCUKYDUHMMXHOBJYRA

Pekanbaru, 2 November 2020
Wakil Dekan I/Ketua Departemen/Ketua Prodi

Dra. Hj. Tity Hastuti, M.Pd
NIP/NIDN. 0011095901

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE-3 DENGAN METODE RUNGE-KUTTA ORDE-4

Suci Mayanti

NPM. 166410800

Skripsi Program Studi Pendidkan Matematika, FKIP Unievrsitas Islam Riau

Pembimbing Utama: Agus Dahlia, M.Si

ABSTRAK

Penggunaan metode numerik dalam menyelesaikan persoalan matematika sudah semakin meluas salah satunya pada persamaan diferensial. Persamaan diferensial orde tinggi biasanya dapat diselesaikan dengan metode numerik seperti persamaan diferensial orde-3. Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan persamaan diferenisial orde-3 dengan metode Runge-Kutta orde-4. Metode penelitian ini adalah metode kepustakaan. Penelitian ini dimulai dari Februari 2020 hingga Agustus 2020. Langkah pertama untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde-3 dengan metode Runge-Kutta orde-4 ditentukan dengan mereduksi persamaan diferensial orde-3 menjadi sistem persamaan diferensial orde-1. Kemudian ditentukan nilai eksak sistem persamaan diferensial. Pada langkah ketiga yatiu menentukan solusi numerik dengan metode Runge-Kutta orde-4 dengan ukuran langkah atau interval (h) yang berbeda-beda. Di akhir penyelesaian, ditentukan galat *(error)* pada tiap interval yang berbeda. Dari hasil penelitian diperoleh perhitungan diperoleh solusi numerik mendekati nilai eksak ketika ukuran atau interval cukup kecil.

Kata kunci: Persamaan diferensial orde-3, metode Runge-Kutta orde-4, galat.

Solving Third Order Differential Equations Using Fourth Order Runge-Kutta Method

Suci Mayanti

NPM. 166410800

Final Project, Mathematic Departement, Faculty of Teaching and Education, Islamic University of Riau

Advisor: Agus Dahlia, M.Si

ABSTRACT

Using of numerical methods for solving mathematical problem has expanded. One of them is to solve differential equations. Higher order differential equations usually attain solve by numerical methods as third order differential equations. This Research aims to solving 3rd order differential equations using 4th order Runge-Kutta method. The method of this research is library research. This research start from February 2020 until August 2020. First step to solve 3rd order differential equations using 4th order Runge-Kutta method is determined by reduction third order differential equations into third first order system of differential equations. Then determine exact solutions third first order differential equations. In the third steps determine numerical solution of third order differential equations by Fourth Runge - Kutta method at variant step size. In the final completion determine error at each step size. The result of this research is numerical solutions close to exact solution when step size very small.

Keywords: Third order differential equations, Fourth order differential equations.

KATA PENGANTAR

Penulis bersyukur kepada Ilahi Rabbi yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya yang sangat berlimpah kepada penulis sehingga penulis diberikan kekuatan sehingga dapat menyelesaikan Skripsi ini. Skripsi ini membahas tentang **“Penyelesaian Persamaan Diferensial Orde-3 Dengan Metode Runge-Kutta Orde-4”.**

Penulis sangat menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini tanpa adanya bantuan dan dukungan dari berbagai pihak sangatlah sulit untuk menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Sri Amnah, M.Si selaku Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Islam Riau.
2. Bapak Rezi Ariawan, M.Pd selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu pendidikan Universitas Islam Riau.
3. Ibu Agus Dahlia, M.Si Selaku dosen pembimbing yang selalu memberika bimbingan, nasehat serta waktunya selama proses pembuatan skripsi ini.
4. Segenap Bapak/Ibu Dosen Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Islam Riau yang telah memberikan izin kepada penulis untuk melakukan penelitian.
5. Ibu dan Ayah yang telah mendukung saya untuk menyelesaikan skripsi ini.

Demikianlah yang dapat penulis sampaikan semoga skripsi. Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini masih terdapat kesalahan karenanya penulis mengharapkan saran dan kritik yang sifatnya membangun demi kesempurnaan skripsi ini.

Pekanbaru, 27 Oktober 2020

Penulis,

Suci Mayanti

DAFTAR ISI

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Persamaan diferensial yang merupakan bagian dari matematika telah banyak digunakan dalam bidang fisika, biologi, kimia, teknik, bisnis dan bidang lainnya. Persamaan differensial adalah persamaan yang terdiri dari variabel tak bebas dan turunannya terhadap variabel bebas (Nugroho, 2011: 1).

Menurut sejarawan matematika, studi mengenai persamaan diferensial dimulai oleh Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1746) pada tahun 1645 dimana ia menuliskan persamaan integral x. Lalu Issac Newton (1642-1727) mengklasifikasi persamaan diferensial orde pertama dalam tiga bentuk:

$$(1)\, \frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$(2)\, \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$(3)\, x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$$

Bentuk pertama dan kedua yaitu turunan biasa pada satu variabel atau lebih dengan bergantung pada variabel tunggal yang bebas. Bentuk ini sekarang dikenal dengan persamaan diferensial biasa. Bentuk ketiga adalah bentuk turunan parsial dengan satu variabel tak bebas. Saat ini bentuk ketiga dikenal dengan persamaan diferensial parsial (Sasser, 2005: 2 – 3).

Persamaan diferensial dapat diselesaikan dengan berbagai metode tergantung orde persamaan differensial dan bentuk persamaan differensial. Salah satu metode yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial adalah metode Runge-Kutta.

Kelebihan metode Runge-Kutta yaitu tidak memerlukan turunan dalam perhitungannya (Chapra & Canele, 2015: 729), selain itu mudah diprogram di dalam komputer (Atkinson dkk, 2009: 70) sehingga menghasilkan ketelitian yang mendekati akurat serta itu metode ini paling efisien dalam menyelesaikan persamaan linier biasa orde tinggi (Blenchard dkk, 2011: 663).

Penelitian mengenai penyelesaian persamaan diferensial dengan metode Runge-Kutta telah banyak dilakukan seperti Palanisamy (2017) menyelesaikan persamaan diferensial orde satu dengan metode Runge-Kutta orde-4. Islam (2015) menyelesaikan persamaan diferensial orde satu dengan metode Runge-Kutta orde-4. Anidu (2015) menyelesaikan persamaan diferensial orde satu dan orde dua dengan metode Runge-Kutta orde-4 berbantu aplikasi Java. Hussain, dkk (2015) menyelesaikan persamaan diferensial orde-3 dengan metode Pengembangan Runge-Kutta Orde-4. Mechee, dkk (2013) menyelesaikan persamaan diferensial orde-3 dengan metode Runge-Kutta Orde-5 untuk diaplikasikan pada masalah aliran film tipis. Mechee, dkk (2014) menyelesaikan persamaan diferensial biasa dan parsial menggunakan metode Runge-Kutta Orde-3 dengan integrator langsung. Oleh karena itu, perlu dilakukan pendalaman lebih lanjut untuk menyelesaian persamaan diferensial orde yang lebih tinggi dan dianalisis keefektifannya. Sehingga menambah referensi untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde-3 menggunakan metode Runge-Kutta orde-4. Oleh karena itu peneliti tertarik untuk membahas "Penyelesaian Persamaan linear Orde Tiga dengan Metode Runge-Kutta Orde Empat".

1.2. Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dari penelitian ini adalah bagaimana penyelesaian persamaan differensial orde tiga dengan metode Runge-Kutta orde empat?

1.3. Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah:

a. Persamaan diferensial yang akan diselesaikan adalah persamaan diferensial linier homogen.
b. Orde persamaan diferensial linier yang dipilih adalah persamaan diferensial orde-3.
c. Metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier orde tiga hanya menggunakan metode Runge-Kutta Orde-4.

1.4. Tujuan Penelitian dan Manfaat penelitian

a) Tujuan Penelitian
   a. Menyelesaikan persamaan differensial orde tiga dengan metode Runge-Kutta orde-4.
   b. Melihat apakah metode Runge-kutta Orde-4 dapat digunakan untuk persamaan diferensial orde-3.

b) Manfaat Penelitian
   a. Bagi penulis untuk meningkatkan wawasan dalam menyelesaikan persamaan differensial dengan metode numerik, khususnya metode Runge-Kutta orde-4.
   b. Bagi pembaca sebagai referensi dalam perkembangan penelitian selanjutnya.
   c. Bagi FKIP Pendidikan Matematika UIR sebagai sumber pustaka yang berguna bagi mahasiswa.

BAB 2

KAJIAN TEORI

2.1. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial (PD) adalah suatu persamaan yang berkaitan dengan nilai fungsi pada nilai turunannya. Persamaan diferensial terdiri dari persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa untuk fungsi tunggal dan persamaan diferensial parsial untuk fungsi beberapa variabel (Chasnov, 2019: 13).

Orde persamaan diferensial adalah orde (tingkat) turunan tertinggi yang ada dalam suatu persamaan. Jika turunan yang tertinggi adalah turunan pertama maka disebut persamaan diferensial orde pertama (Lebl, 2019: 18). Jika turunannya tertingginya adalah turunan kedua disebut persamaan diferensial orde kedua dan berlaku juga penyebutan orde selanjutnya untuk turunan yang lebih tinggi. Orde persamaan diferensial terdiri dari persamaan diferensial orde satu orde dua dan orde tinggi yang mana pada penelitian ini lebih difokuskan pada persamaan diferensial orde tiga.

Hal ini juga sejalan dengan pendapat Gautschi (2012: 329) dimana:

1) $d = 1, y' = f(x, y)$, persamaan diferensial tunggal orde pertama
2) $d > 1, u^{(d)} = g\left(x, u, u', \dots, u^{(d-1)}\right)$, persamaan diferensial tunggal orde ke-d. u diambil dari $u^{(i)}(a) = u^{(i)}{}_0$, $i = 0, 1, 2, \dots, d-1$

Bentuk persamaan diferensial adalah:

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y \qquad [1]$$

Dimana λ adalah konstanta dan nilai y bergantung kepada x. Persamaan ini melibatkan fungsi y dan $\frac{dy}{dx}$. Solusi umum dari persamaan [1] adalah:

$$y(x) = Ce^{\lambda x} \qquad [2]$$

Konstanta C adalah nilai yang dapat ditentukan jika kita masukkan nilai awal atau nilai batas maka akan diberikan solusi khusus dari persamaan $y(x_0)$ pada x_0 (Tracy, 2017: 3).

Suatu persamaan diferensial akan mempunyai solusi umum jika tidak diberi masalah nilai awal atau masalah syarat batas dan suatu persamaan diferensial akan mempunyai solusi khusus jika diberikan masalah nilai awal dan masalah syarat batas (Kartono, 2012: 7)

2.2. Persamaan Diferensial Orde Tiga

Menurut Olabode (2016: 136) bentuk persamaan diferensial Orde tiga secara umum adalah:

$$y''' = F(x, y, y', y'') \qquad y(a) = y_0,\ y'(a) = \eta_0, \quad y''(a) = \eta_1 \quad [3]$$

Menurut Varela dkk (2019: 4) persamaan diferensial linear orde tiga didefinisikan sebagai:

$$L = r_0(x)\frac{d^3}{dx^3} + r_1(x)\frac{d^2}{dx^2} + r_2(x)\frac{d}{dx} + r_3(x), \quad a < x < b \qquad [4]$$

Dimana $r_0(x) > 0$ pada interval terbuka (a, b) dan $r_1(x), r_2(x), r_3(x)$ adalah fungsi kontinu pada interval tertutup $[a, b]$.

2.3. Persamaan diferensial Linear Homogen Orde Tiga

Suatu persamaan diferensial disebut linear jika tidak ada perkalian variabel tak bebas (y) dengan turunannya. Dapat pula dikatakan bahwa semua koefisiennya adalah kumpulan fungsi dari variabel bebas. Suatu persamaan diferensial disebut nonlinear jika terdapat perkalian variabel tak bebas (y) dengan turunannya (Nugroho, 2011: 3).

Contoh

$y'' + 4xy' + 2y = cos\ (x)$ (P.Diferensial linear dalam y)

$y'' + 4yy' + 2y = cos\ (x)$ (P.Diferensial nonlinear karena terdapat yy')

Bentuk umum persamaan diferensial biasa linier adalah:

$$a_n(t)\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^n x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)\frac{dy}{dt} + a_n(t)x = f(t) \qquad [5]$$

Dimana $f(t)$ adalah fungsi penentu homogen. Jika nilai $f(t) = 0$ maka disebut persamaan diferensial biasa linier homogen dan jika $f(t) \neq 0$ maka disebut persamaan diferensial biasa linier nonhomogen (Sundari, 2019: 4-5). Bentuk persamaan diferensial linear homogen orde-3 adalah saat nilai $n = 3$ pada persamaan [5]. Jika persamaan diferensial biasa berbentuk selain dari persamaan [5] maka disebut juga persamaan diferensial nonlinier (Marwan & Munzir, 2009: 7).

2.4. Sistem Persamaan Diferensial Orde Satu

Suatu persamaan dengan bentuk:

$$A_1(t)x' + A_0(t)x = B_0(t), \qquad t \in \mathrm{I} \qquad [6]$$

Dimana $A_1(t), A_0(t)$ kontinu pada fungsi matriks $n \times n$ dan $B_0(t)$ fungsi nilai vektor yang kontinu maka persamaan di atas disebut sistem persamaan diferensial. I adalah interval real dan A_1, A_0 dan B_0 bisa berbentuk bilangan real ataupun kompleks. Jika $B_0 = 0$ maka disebut juga sistem persamaan diferensial homogen dan jika $B_0 \neq 0$ maka disebut juga sistem persamaan diferensial nonhomogen (Coddington & Carlson, 1997: 25).

Untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial langkah pertama yang perlu dilakukan adalah mengubah A_1 menjadi matriks A. Lalu dicari solusi non trivial dengan cara:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad [7]$$

Jika λ adalah nilai eigen dari A maka nilai vector eigen v dapat ditentukan dengan

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b & c \\ d & e-\lambda & f \\ g & h & i-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{(Chasnov, 2019: 78)}$$

2.5. Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta ditemukan oleh C. Runge dan M.W Kutta pada tahun 1900-an. C. Runge mengembangkan metode ini dengan metode Euler yang mana formulanya menghasilkan ketelitian yang tinggi. Penelitian Runge Kemudian dikembangkan oleh Heun (1900) dan Kutta (1901). Lalu metode ini menjadi peran utama dalam metode iterasi untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa (Chauhan & Srivastava, 2019: 375-376).

Definisi 1

Metode Runge-Kutta didapat dari modifikasi Deret Taylor dan bentuk formula ini tidak memerlukan turunan dalam langkah pengerjaannya. Melalui metode ini akan didapatkan solusi yang signifikan akurat.
Metode Runge-Kutta dapat digeneralisasi dari metode Euler sehingga

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \qquad [8]$$

Dengan $\phi(x_i, y_i, h)h$ disebut juga fungsi tambahan atau disebut juga gradien pada interval. Fungsi tambahan dapat juga ditulis dengan

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n \qquad [9]$$

Dimana a adalah konstanta dan k adalah

$$k_1 = f(x_I, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_2 h + q_{22} k_2 h)$$

.

.

.

$$k_n = f\big(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2 + \cdots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h\big) \quad [10]$$

Dimana p dan q adalah konstanta. Perlu diingat bahwa k adalah hubungan perulangan seperti k_1 muncul di k_2 yang juga muncul di k_3 dan selanjutnya. Karena k adalah fungsi evaluasi, perulangan ini membuat metode Runge-Kutta efisien untuk mencari solusi persamaan diferensial.

Metode Runge-Kutta orde pertama diistilahkan dengan fungsi tambahan dalam $n = 1$, Metode Runge-Kutta orde-2 diistilahkan dengan fungsi tambahan dalam $n = 2$ dan begitu pula untuk orde selanjutnya (Chapra & Canale, 2015: 729-730).

Definisi 2

2.5.1. Metode Runge-Kutta Orde Satu

Metode Runge-Kutta Orde Satu sama dengan metode Euler (Chapra & Canele, 2015: 730). Metode Euler mempunyai formula:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Dimana $f(x_i, y_i)$ adalah persamaan diferensial yang dievaluasi pada x_i dan y (Chapra & Canele, 2015:710).

Definsi 3

2.5.2. Metode Runge-Kutta Orde Dua

Metode Runge-Kutta Orde Dua mempunyai formula:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2)h$$

Dimana

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

Dengan menggunakan deret Taylor maka didapat a_1, a_2, p_1 dan q_{11} didapat tiga persamaan dengan empat konstanta yang tidak diketahui, yaitu:

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_2 p_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 q_{11} = \frac{1}{2}$$ (Chapra & Canele, 2015: 730).

Definisi 4

2.5.3. Metode Runge-Kutta Orde Tiga

Metode Runge-Kutta Orde Tiga menggunakan penurunan seperti pada metode Runge-Kutta Orde Dua. Hasil dari penurunan adalah enam persamaan dengan delapan konstanta yang tidak diketahui. Formulanya yaitu:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$$

Dimana

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h\right)$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i - k_1 h + 2k_2 h)$$

Perlu diketahui bahwa turunan adalah fungsi pada x, reduksi orde-3 ini berasal dari aturan Simpson 1/3 (Chapra & Canele, 2015: 734 – 735).

Definisi 5

2.5.4. Metode Runge-Kutta Orde-4

Metode ini juga disebut metode Runge-Kutta Orde-4 Klasikal. Metode ini didapatkan dengan mencari empat kemiringan garis yang didapat dari fungsi $f(x_I, y_i)$ persamaan diferensial. Gradien masing masing diberi nama $k_1, k_2, k_3,$ dan k_4 (Chapra & Canale, 2015: 735-736). Formula yang dipakai adalah:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{k_1+2k_2+2k_3+k_4}{6}\right)h \qquad [11]$$

(Blanchard, 2012:656-657)

Untuk mendapatkan nilai k_1, k_2, k_3, k_4 adalah:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h) \qquad [12]$$

Metode ini hanya dapat digunakan untuk persamaan diferensial orde-1 dan jika metode ini digunakan untuk persamaan diferensial orde yang lebih tinggi maka persamaan diferensial haruslah direduksi menjadi sistem persamaan diferensial orde-1. Metode ini juga hampir sama dengan aturan Simpson $\frac{1}{3}$ dan hampir sama dengan Metode Heun dalam estimasi jarak seperti menentukan rata-rata gradient (Chapra & Canale, 2015: 736).

Teorema 1

Secara umum fungsi tambahan metode Runge-Kutta adalah:

$$\Phi = h^{i-1}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \beta_j^{(i)} F_j^{(i)}\right\} \qquad [13]$$

Dimana $\beta_j{}^{(i)}$ adalah fungsi parameter RK a_{ij}, b_i dan c_i dan diasumsikan bahwa jumlah baris kondisi dibawah telah terpenuhi

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \qquad i = 2, 3, 4 \ldots \qquad [14]$$

Galat pemotongan lokal dalam bentuk persamaan dasar dan parameter b_1, b_2 dan c_2 metode RK adalah:

$$t_{n+1} = h(\Phi - \Delta)$$

$$t_{n+1} = h\left\{[(b_1 + b_2) - 1]F_1{}^{(1)} + h^2 + \left[b_2 c_2 - \tfrac{1}{2}\right] F_1{}^{(2)} + h^3\left[\left(\tfrac{1}{2} b_2 c_2{}^2 - \tfrac{1}{6}\right) F_1{}^{(3)} - \tfrac{1}{6} F_2{}^{(3)}\right] + O(h^4)\right\} \qquad [15]$$

Secara umum galat pemotongan lokal adalah:

$$t_{n+1} = h^i \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left(\beta_j{}^{(i)} - \frac{a_j{}^{(i)}}{i!} \right) F_j{}^{(i)} \right\}$$

$$t_{n+1} = h^i \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \tau_j{}^{(i)} F_j{}^{(i)} \right\} \qquad [16]$$

Dimana $\tau_j{}^{(i)} = \beta_j{}^{(i)} - \frac{a_j{}^{(i)}}{i!} \quad i = 1, 2, \ldots;\ j = 1, 2, \ldots;\ n_i$

Simbol $\tau_j{}^{(i)}$ disebut koefisien galat. Bandingkan persamaan [16] dan [13] maka akan didapat delapan koefisien galat metode Runge-Kutta orde-4 yaitu:

$$\tau_1{}^{(1)} = \sum_i b_i - 1 \qquad [17]$$

$$\tau_1{}^{(2)} = \sum_i b_i c_i - \frac{1}{2} \qquad [18]$$

$$\tau_1{}^{(3)} = \frac{1}{2} \sum_i b_i c_i{}^2 - \frac{1}{6} \qquad [19]$$

$$\tau_2{}^{(3)} = \sum_{ij} b_i a_{ij} c_j - \frac{1}{6} \qquad [20]$$

$$\tau_1{}^{(4)} = \frac{1}{6} \sum_i b_i c_i{}^3 - \frac{1}{24} \qquad [21]$$

$$\tau_2{}^{(2)} = \sum_{ij} b_i c_i a_{ij} c_j - \frac{1}{8} \qquad [22]$$

$$\tau_3{}^{(4)} = \frac{1}{2} \sum_i b_i a_{ij} c_i{}^2 - \frac{1}{24} \qquad [23]$$

$$\tau_4{}^{(4)} = \sum_i b_i a_{ij} a_{jk} c_k - \frac{1}{24} \qquad [24]$$

(Dormand, 2018: 36-39)

2.6. Tabel Butcher

Metode Runge-kutta dapat direpresentasikan dengan table partisi dalam bentuk:

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

Dimana c adalah vector posisi pada tiap langkah, matriks A adalah tahap yang bergantung pada turunan yang ditemukan pada langkah lainnya dan b^T adalah bobot vektor quadratur menunjukkan hasil akhir yang bergantung pada turunan yang dihitung pada tiap langkah. Pada metode eksplisit, komponen segitiga atas A dikosongkan, karena ia bernilai nol (Butcher, 2008: 94).

Definisi 6

2.7. Stabilitas Metode Runge-Kutta

Misalkan $Y = (k_1, k_2, k_3, \dots k_n)$ dan $1 = (1, 1, \dots 1)^T$ maka

$$Y = 1y_0 + h\lambda AY = 1y_0 + zAY$$

Disusun kembali untuk menghasilkan

$$Y = (1 - zA)^{-1}1y_0$$

Substitusi ke dalam persamaan y_{n+1}

$$y_1 = y_0 + h\lambda AY = y_0 + zb^T(1 - zA)^{-1}1y_0$$

Jadi persamaan $R(z)$ adalah

$$R(z) = y_0 + zb^T(1 - zA)^{-1}1y_0$$

Gunakan persamaan matriks deret geometri $(1 - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} T^k$ maka:

$$R(z) = 1 + zb^T(1 + zA + z^2A^2 + z^3A^3 + \cdots)1$$

Untuk metode eksplisit kita gunakan kondisi orde sebagai berikut:

$$b^TA^k1 = b^TA^{k-1}c \qquad [25]$$

Maka

$$R(z) = 1 + zb^T1 + z^2b^TA^0c + z^3b^TAc + z^4b^TA^2c + \cdots \qquad [26]$$

Bandingkan pada ekspansi deret Eksponen

$$\exp(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{p!} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \cdots \quad [27]$$

Orde pada metode adalah nilai tertinggi pada p (Butcher, 2008: 101-102).

2.8. Reduksi Orde

Persamaan linear orde tinggi berbentuk:

$$b_n \frac{d^n x}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + b_1(t)\dot{x} + b_0(t)x = g(t) \quad [28]$$

$$x(t_0) = c_0, \quad \dot{x}(t_0) = c_1, \ldots, x^{(n-1)} = c_{n-1} \quad [29]$$

Dimana $b_n(t) \neq 0$ dapat direduksi ke system matriks orde pertama

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t)$$

$$x(t_0) = c \quad [30]$$

Dimana $A(t), f(t)$ dan c adalah nilai awal yang telah diketahui. Metode reduksi adalah sebagai berikut:

1. Tulis persamaan [28] sehingga $\frac{d^n x}{dt^n}$ berada pada ruas kiri. Sehingga:

$$\frac{d^n x}{dt^n} = a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x + f(t) \quad [31]$$

   Dimana $a_j(t) = -\frac{b_j(t)}{b_n(t)}$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ dan $f(t) = \frac{g(t)}{b_n(t)}$

2. Definisi n variabel baru (bilangan yang sama sebagai orde persamaan diferensial asli): $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ dengan persamaan:

$$x_1(t) = x(t) \quad x_2(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad x_3(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}, \ldots,$$

$$x_n(t) = \frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} \quad [32]$$

   Variabel baru ini saling berhubungan dengan persamaan:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t) \quad [33]$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t)$$

3. Nyatakan $\frac{dx_n}{dt}$ dalam bentuk variabel baru. Diproses dalam diferensiasi pertama persamaan terakhir untuk mendapatkan

$$\dot{x}_n(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}}\right] = \frac{d^n x(t)}{dt^n} \qquad [34]$$

Lalu dari persamaan [31] dan [32] menjadi

$$\dot{x}_n(t) = a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(t) + f(t)$$

$$= a_{n-1}(t)x_n(t) + \cdots + a_1(t)x_2(t) + a_0(t)x_1(t) + f(t)$$

Untuk mudahnya kita tulis kembali persamaan terakhir ini sehingga $x_1(t)$ muncul sebelum $x_2(t)$ dan seterusnya sehingga:

$$\dot{x}_n(t) = a_0(t)x_1(t) + a_1(t)x_2(t) + \cdots + a_{n-1}(t)x_n(t) + f(t) \qquad [35]$$

4. Persamaan [33] dan [35] adalah sistem persamaan diferensial linier orde-1 dalam bentuk $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Sistem ini ekuivalen ke persamaan matriks tunggal $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t)$ jika kita definisikan

$$x(t) \equiv \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad [36]$$

$$x(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{bmatrix} \qquad [37]$$

$$A(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & a_3(t) & \cdots & a_2(t) \end{bmatrix}$$

$$c \equiv \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} \qquad [38]$$

Maka kondisi awal [28] dapat diberikan dengan persamaan matriks (vektor) $x(t_0) = c$. Persamaan terakhir ini adalah hasil dari persamaan [36], [37] dan [30] karena

$$x(t_0) = x(t) \equiv \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} \qquad [39]$$

Jika tidak ada persamaan nilai awal yang diketahui maka langkah 1- 4 dengan sendirinya mereduksi setiap persamaan linier persamaan [28] ke persamaan matriks $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t)$ (Bronson & Costa, G.B, 2006: 149 - 150).

2.9. Galat (*Error*)

Penyelesaian secara numerik akan memberikan solusi perkiraan yang mendekati nilai sebenarnya dengan cara analitik. Seberapa dekat nilai hampiran dengan solusi sebenarnya ini dihitung dengan galat atau seberapa besar kesalahan yang didapat dari selisih nilai hampiran dengan nilai eksak. Secara umum galat terbagi dua yaitu galat pemotongan (*Truncation error)* dan galat pembulatan (*Round-off error)*. Galat pemotongan yaitu solusi numerik digunakan untuk merepresentasikan dari nilai eksak (Chapra & Canale, 2015: 59).

Galat pemotongan terdiri dari galat pemotongan lokal yaitu galat yang terjadi pada langkah pertama perhitungan. Kesalahan yang terjadi akan terus salah pada langkah atau iterasi selanjutnya yang disebut juga galat pemotongan total (*total-global truncation error*) (Yulistianto, 2015: 271). Galat pembulatan (*Round-off error)* yaitu angka yang didapat mempunyai signifikan terbatas untuk merepresentasikan nilai eksak (Chapra & Canale, 2015: 59).

Untuk mencari galat secara umum dapat diformulasikan sebagai berikut:

$$E_t = |nilai\ sebenarnya - nilai\ aproksimasi| \qquad [40]$$

Penggunaan t pada formula di atas mewakili galat yang benar (*true*). Dalam menghitung nilai yang akan dievaluasi bisa juga dengan menorrmalkan dari nilai sebenarnya dengan

$$Galat\ relatif\ dalam\ pecahan = \frac{error\ sebenarnya}{nilai\ sebenarnya}$$

Nilai galat relative bisa juga dinyatakan dalam persentase dengan mengalikan galat arelative dengan 100%

$$Galat\ relatif = \frac{error\ sebenarnya}{nilai\ sebenarnya} \times 100\% \qquad [41]$$

Dalam lain kasus galat juga dapat diperikirakaan dari perbedaan aproksimasi sebelum dengan aproksimasi yang baru didapat dengan formula

$$Galat\ relatif\ = \frac{aproksimasi\ terbaru - aproksimasi\ sebelum}{aproksimasi\ terbaru} \times 100\%$$

(Chapra & Canale, 2015: 59-60)

2.10. Penelitian yang Relevan

Berdasarkan kajian pustaka yang dilakukan peneliti mengenai metode Runge kutta untuk menyelesaikan persamaan diferensial penelitian yang relevan dengan penelitian ini adalah:

a. Sagita Charolina Sihombing dan Agus Dahlia (2018) menyimpulkan bahwa untuk persamaan linier orde-1 dan orde-2 solusi metode Runge-Kutta orde-5 Fehlberger dengan metode Runge-Kutta orde-5 Butcher memberikan solusi yang sama dengan nilai galat yang relative kecil.
b. Athara Abdulsalam, Norazak Senu dan Zanariah Abdul Majid (2019) menyimpulkan bahwa persamaan diferensial biasa orde-3 dengan dua masalah syarat batas dengan kondisi batas tipe I dan tipe II dapat diselesaikan menggunakan secara langsung dengan metode Runge-Kutta melalui teknik shooting (penembakan) dan metode baru ini bekerja dengan baik.
c. M. Mechee, N. Senu F, Ismail B, Nikouravan dan Z. Siri (2014) yang mana menyimpulkan metode Runge-Kutta orde tiga dapat

digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial secara langsung untuk persamaan diferensial spesial orde tiga. Solusi numerik menunjukkan bahwa metode ini dikenal baik daripada metode lain dalam literatur dan memerlukan sedikit evaluasi.

BAB 3

METODE PENELITIAN

3.1. Jenis Penelitian

Jenis penelitian ini adalah kajian pustaka. Penelitian pustaka merupakan bagian dari penelitian kualitatif. Menurut Hamzah (2019: 25) penelitian pustaka adalah jenis penelitian yang datanya dieksplorasi dari buku dan jurnal yang ada di pustaka untuk dikaji dan dianalisis berdasarkan teori tertentu yang melandasinya untuk mencapai tujuan penelitian.

3.2. Waktu Penelitian

Penelitian ini dimulai pada bulan Februari 2020 hingga Agustus 2020.

3.3. Data atau Sumber data

Data yang diperoleh dalam penelitian ini terbagi dua, yaitu:

a. Data primer yaitu data yang langsung didapatkan peneliti dari hasil penelitian seperti jurnal yang relevan dengan penelitian, skripsi, tesis.
b. Data sekunder yaitu data yang didapatkan peneliti melalui sumber yang menuliskan data primer seperti buku.

3.4. Prosedur Penelitian

Adapun langkah-langkah peneliti untuk menyelesaikan persamaan diferensial ini adalah:

1) Reduksi persamaan diferensial orde-3 ke sistem persamaan diferenisal orde-1
2) Cari nilai k_1, k_2, k_3 dan k_4 dari persamaan diferensial orde-3.
3) Substitusi koefisien k dalam formula umum metode Runge-Kutta

4) Selesaikan persamaan diferensial tersebut dengan metode Runge-Kutta dengan nilai ukuran langkah atau interval yang berbeda-beda.
5) Bandingkan galat pada setiap ukuran langkah.

BAB 4

PEMBAHASAN

4.1. Metode Runge-Kutta Orde-4

Dalam bab ini akan diuraikan penurunan solusi untuk persamaan diferensial orde-3 dengan menggunakan metode Runge-Kutta Orde-4.

Dari kajian teori bentuk persamaan diferensial Orde tiga dalam persamaan [3] adalah:

$$y''' = F(x, y, y', y'') \qquad y(a) = y_0,\ y'(a) = \eta_0, \quad y''(a) = \eta_1$$

Olabode (2016: 136)

Berdasarkan definsi 1 bentuk umum metode Runge-Kutta adalah

$$y_{i+1} = y_i + \ \phi(x_i, y_i, h)h \qquad [42]$$

Dengan $\phi(x_i, y_i, h)h$ disebut juga fungsi tambahan atau disebut juga gradien pada interval (Blenchard, 2011: 656). Fungsi tambahan dapat juga ditulis dengan

$$\phi = b_1k_1 + b_2k_2 + \cdots + b_nk_n \qquad [43]$$

Dimana a adalah konstanta dan k adalah

$$k_1 = f(x_{\mathrm{I}}, y_i)$$
$$k_2 = f(x_{\mathrm{i}} + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)$$
$$k_3 = f(x_{\mathrm{i}} + p_2h, y_i + q_{21}k_2h + q_{22}k_2h)$$
$$\vdots$$
$$k_n = f\big(x_{\mathrm{i}} + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2 + \cdots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h\big)$$

(Chapra & Canale, 2015: 729-730)

Berdasarkan definsi 5 formula Runge-Kutta Orde-4 adalah:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}\right)h \qquad [44]$$

(Blenchard, 2011: 657)

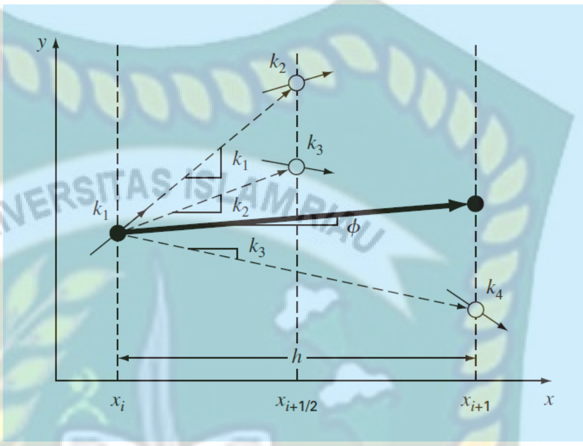
Dengan nilai $k_1, k_2, k_3,$ dan k_4 adalah:

$$k_1 = f(x_i, y_i) \qquad [45]$$

$$k_2 = f(x_i + c_2h, y_i + a_{21}k_1h) \qquad [46]$$

$$k_3 = f(x_i + c_3h, y_i + (a_{31}k_1 + a_{32}k_2)h) \qquad [47]$$

$$k_4 = f(x_i + c_4h, y_i + (a_{41}k_1 + a_{41}k_2 + a_{43}k_3)h) \qquad [48]$$



Gambar 1. Grafik Estimasi Kemiringan Metode Runge-Kutta Orde-4

Formula Runge-Kutta didapat dari empat gradient k_1, k_2, k_3 dan k_4. dengan funsgi $f(x_i, y_i)$ yang telah diketahui yang berbentuk persamaan diferensial.

Gradien k_1 dihitung dengan metode Euler yaitu:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

Gradien k_2 dihitung dengan menghubungkan pada gradient sebelumnya yaitu k_1 yang berhubungan dengan titik x_i dan $x_{i+\frac{1}{2}}$

$$k_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$k_1 = \frac{y_{i+1} - y_i}{\frac{1}{2}h}$$

$$\frac{1}{2}hk_1 = y_{i+1} - y_i$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}hk_1$$

Gunakan fungsi $f(x_i, y_i)$ untuk menentukan gradien k_2 adalah

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}\ hk_1)$$

Gradien k_3 juga menggunakan langkah yang sama seperti gradien k_2

$$k_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$k_2 = \frac{y_{i+2} - y_i}{\frac{1}{2}h}$$

$$\frac{1}{2}hk_2 = y_{i+2} - y_i$$

$$y_{i+2} = y_i + \frac{1}{2}hk_2$$

Gunakan fungsi $f(x_i, y_i)$ untuk menentukan gradien k_3 adalah

$$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}\ hk_2)$$

Gradien k_4 dihitung dengan menghubungkan pada gradient k_3 yaitu k_1 yang berhubungan dengan titik x_i dan x_{i+1}

$$k_3 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$k_3 = \frac{y_{i+3} - y_i}{h}$$

$$hk_3 = y_{i+3} - y_i$$

$$y_{i+1} = y_i + hk_3$$

Jadi gradien k_4 adalah

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + \ hk_3)$$

Jadi nilai $k_1, k_2, k_3,$ dan k_4 adalah:

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad [49]$$

$$k_2 = f\left(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}k_1h\right) \quad [50]$$

$$k_3 = f\left(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}k_2h\right) \quad [51]$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h) \quad [52]$$

Untuk mendapatkan nilai c_i, a_{ij} gunakan koefisien orde 4 menurut Dormand (2018 : 38 – 39) yang merupakan teorema 1 yang didapat dari perluasan deret Taylor orde-4 untuk dua variabel.

$$\tau_1^{(1)} = \sum_i b_i - 1 \qquad [53]$$

$$\tau_1^{(2)} = \sum_i b_i c_i - \frac{1}{2} \qquad [54]$$

$$\tau_1^{(3)} = \frac{1}{2}\sum_i b_i {c_i}^2 - \frac{1}{6} \qquad [55]$$

$$\tau_2^{(3)} = \sum_{ij} b_i a_{ij} c_j - \frac{1}{6} \qquad [56]$$

$$\tau_1^{(4)} = \frac{1}{6}\sum_i b_i {c_i}^3 - \frac{1}{24} \qquad [57]$$

$$\tau_2^{(2)} = \sum_{ij} b_i c_i a_{ij} c_j - \frac{1}{8} \qquad [58]$$

$$\tau_3^{(4)} = \frac{1}{2}\sum_{ij} b_i a_{ij} {c_i}^2 - \frac{1}{24} \qquad [59]$$

$$\tau_4^{(4)} = \sum_{ij} b_i a_{ij} a_{jk} c_k - \frac{1}{24} \qquad [60]$$

Sehingga diperluas menjadi

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1 \qquad [61]$$

$$b_2 c_2 + b_3 c_3 + b_4 c_4 = \frac{1}{2} \qquad [62]$$

$$b_2 {c_2}^2 + b_3 {c_3}^2 + b_4 {c_4}^2 = \frac{1}{3} \qquad [63]$$

$$b_3 a_{32} c_2 + b_4 a_{42} c_2 + b_4 a_{43} c_3 = \frac{1}{6} \qquad [64]$$

$$b_2 {c_2}^3 + b_3 {c_3}^3 + b_4 {c_4}^3 = \frac{1}{4} \qquad [65]$$

$$b_3 c_3 a_{32} c_2 + b_4 c_4 a_{42} c_2 + b_4 c_4 a_{43} c_3 = \frac{1}{8} \qquad [66]$$

$$b_3 a_{32} {c_2}^2 + b_4 a_{42} {c_2}^2 + b_4 a_{43} {c_3}^2 = \frac{1}{12} \qquad [67]$$

$$b_4 a_{43} a_{32} c_2 = \frac{1}{24} \qquad [68]$$

Kita gunakan asumsi simplifikasi oleh Butcher agar menghasilkan kondisi orde yang tepat sehingga:

$$\sum_{i=1}^{s} b_i\, a_{ij} = b_i(1 - c_j) \qquad j = 2, 3, 4 \qquad [69]$$

Dari persamaan [67] di atas kita peroleh

$$b_3 a_{32} + b_4 a_{42} = b_2(1 - c_2)$$

$$b_4 a_{43} = b_3(1 - c_3)$$

$$b_4(1 - c_4) = 0 \qquad [70]$$

Saat $j = 4$ dari persamaan di atas $c_4 = 1$ dan $b_4 \neq 0$ untuk metode empat langkah. Substitusi persamaan [59], [60] dan [62] untuk menyelesaikan b_2, b_3 dan b_4 sehingga persamaan [59], [60] dan [62] menjadi:

$$b_2 c_2 + b_3 c_3 + b_4 = \frac{1}{2} \qquad [71]$$

$$b_2 {c_2}^2 + b_3 {c_3}^2 + b_4 = \frac{1}{3} \qquad [72]$$

$$b_2 {c_2}^3 + b_3 {c_3}^3 + b_4 = \frac{1}{4} \qquad [73]$$

Selanjutnya digunakan aturan Cramer untuk menyelesaikan persamaan [59], [60] dan [62] langkah pertama tentukan determinan dari koefisien matriks

$$D = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & 1 \\ {c_2}^2 & {c_3}^2 & 1 \\ {c_2}^3 & {c_3}^2 & 1 \end{vmatrix} = -c_2 c_3 (c_2 - 1)(c_2 - c_3)(c_3 - 1)$$

Untuk mendapatkan nilai b_2

$$D_{b_2} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & c_3 & 1 \\ \frac{1}{3} & {c_3}^2 & 1 \\ \frac{1}{4} & {c_3}^2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-c_3(c_3 - 1)(2c_3 - 1)}{12}$$

$$b_2 = \frac{D_{b_2}}{D} = \frac{\frac{-c_3(c_3-1)(2c_3-1)}{12}}{-c_2c_3(c_2-1)(c_2-c_3)(c_3-1)} = \frac{1-2c_3}{12c_2(1-c_2)(c_3-c_2)}$$

$$= \frac{2c_3-1}{12c_2(c_2-1)(c_3-c_2)}$$

Selajutnya untuk mendapatkan nilai b_3

$$D_{b_3} = \begin{vmatrix} c_2 & \frac{1}{2} & 1 \\ {c_2}^2 & \frac{1}{3} & 1 \\ {c_2}^3 & \frac{1}{4} & 1 \end{vmatrix} = \frac{c_2(c_2-1)(2c_2-1)}{12}$$

$$b_3 = \frac{D_{b_3}}{D} = \frac{\frac{c_2(c_2-1)(2c_2-1)}{12}}{-c_2c_3(c_2-1)(c_2-c_3)(c_3-1)} = \frac{1-2c_2}{12c_3(1-c_3)(c_3-c_2)}$$

$$= \frac{2c_2-1}{12c_3(c_3-1)(c_3-c_2)}$$

Selanjutnya untuk mendapatkan nilai b_4

$$D_{b_4} = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \frac{1}{2} \\ {c_2}^2 & {c_3}^2 & \frac{1}{3} \\ {c_2}^3 & {c_3}^2 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = -\frac{c_2c_3(c_2-c_3)(3-4c_2-4c_3+6c_2c_3)}{12}$$

$$b_4 = \frac{D_{b_4}}{D} = \frac{-\frac{c_2c_3(c_2-c_3)(3-4c_2-4c_3+6c_2c_3)}{12}}{-c_2c_3(c_2-1)(c_2-c_3)(c_3-1)}$$

$$= \frac{6c_2c_3-4(c_2+c_3)+3}{12(c_2-1)(c_3-1)}$$

Dari persamaan [50] dan [51] didapat nilai $c_2 = c_3 = \frac{1}{2}$ yang mana menurut Kutta termasuk pengecualian kasus V. Sehingga pengecualian pada kasus V menjadi

$$\begin{array}{c|} 0 & \end{array}$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{6b_3} & \frac{1}{6b_3} & & \\
1 & 0 & 1-3b_3 & 3b_3 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3}-b_3 & b_3 & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

$$a_{31} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6b_3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6 \times \frac{1}{3}} = 0$$

$$a_{32} = \frac{1}{6b_3} = \frac{1}{6 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$a_{41} = 0$$

$$a_{42} = 1 - 3b_3 = 1 - 3\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

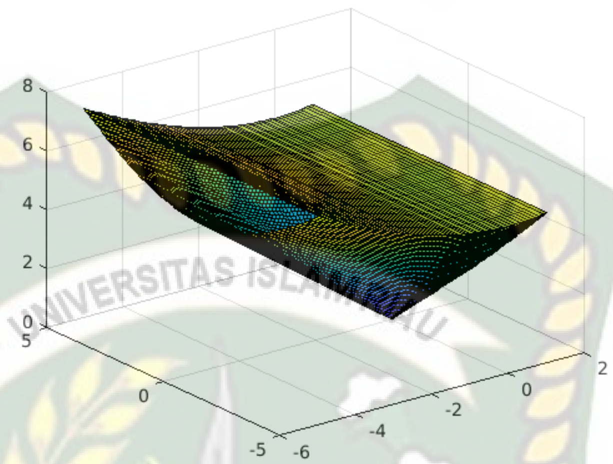
$$a_{43} = 3b_3 = 3\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

Sehingga table Buthernya menjadi

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

4.2. Stabilitas Metode Runge-Kutta Orde-4

Dengan mengguanakan Matlab akan dilihat kestabilan metode Runge-Kutta orde-4 menggunakan formula pada definisi 6 sehingga didapat:



Gambar 2. Kurva daerah stabil metode Runge-Kutta orde-4

Dimana sumbu-x adalah daerah real, sumbu-y adalah daerah imajiner dan sumbu-z adalah daerah stabil kompleks dari formula Runge-Kutta orde-4.

4.3. Contoh Numerik

Pada contoh numerik ini akan diselesaikan dua persamaan diferensial orde-3 dengan masalah nilai awal dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde-4. Solusi numerik yang didapat akan dibandingkan dengan solusi eksak yang mana disebut juga galat pada tiap langkah.

1) $y''' + y = 0$

   $y(0) = 1 \quad y'(0) = -1 \quad y''(0) = 1 \quad 0 < x < 1$

   Solusi Eksak $y(x) = e^{-x}$ dengan $h = 0,1$

2) $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = 0$

   $y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \quad y''(0) = -1 \quad 0 \leq x \leq 1$

   Solusi Eksak $y(x) = e^{-x} + xe^{-x}$

Solusi soal no 1

$y''' + y = 0$

$y(0) = 1 \quad y'(0) = -1 \quad y''(0) = 1$

Solusi Eksak $y(x) = e^{-x}$ dengan $h = 0,1$

$y''' = -y$ langkah 1

$y_1 = y$

$y_2 = y'$ langkah 2

$y_3 = y''$

$y''' = -y = -y_1$

${y_1}' = 0y_1 + 1y_2 + 0y_3$

${y_2}' = 0y_1 + 0y_2 + 1y_3$ langkah 3

$y_3' = -1y_1 + 0y_2 + 0y_3$

$\frac{dy_1}{dx} = y_2 \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3 \quad \frac{dy_3}{dx} = -y_1$

$y_1 = 1 \quad y_2 = -1 \quad y_3 = 1$

Solusi Eksak

${y_1}' = 0y_1 + 1y_2 + 0y_3$

${y_2}' = 0y_1 + 0y_2 + 1y_3$ [74]

$y_3' = -1y_1 + 0y_2 + 0y_3$

Persamaan [72] dapat dibentuk matriks A menjadi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Untuk mendapatkan nilai eigen haruslah memenuhi

$$|A - I\lambda| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda\right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & -\lambda \\ -1 & 0 & -\lambda & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$-\lambda^3 - 1 - 0 - (0 + 0 + 0) = 0$

$-\lambda^3 - 1 = 0$

$-(\lambda^3 + 1)$

$-(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0$

$-(\lambda + 1) = 0$ atau $(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0$

$-\lambda - 1 = 0$ $\lambda_{2.3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\lambda_1 = -1$ $\lambda_{2.3} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$

$\lambda_{2.3} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ atau $\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

Untuk $\lambda_1 = -1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ y_2 + y_3 \\ -y_1 + y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$y_1 = -y_2$ [75]

$y_2 = -y_3$ [76]

$y_1 = y_3$ [77]

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ -y_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} y_1$$

Jadi vector eigen $\lambda = -1$ adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

$$\begin{bmatrix} -\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) & 1 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) & 1 \\ -1 & 0 & -\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) y_1 + y_2 \\ -\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) y_2 + y_3 \\ -y_1 - \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} y_1$$

$$y_3 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} y_1$$

$$y_1 = -\frac{1+\sqrt{3}i}{2} y_3$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \frac{1+\sqrt{3}i}{2} y_1 \\ -\frac{2}{1+\sqrt{3}i} y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \\ -\frac{2}{1+\sqrt{3}i} \end{bmatrix} y_1$$

Jadi vector eigen $\lambda = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \\ -\frac{2}{1+\sqrt{3}i} \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda_3 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$$\begin{bmatrix} -\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right) & 1 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right) & 1 \\ -1 & 0 & -\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right) y_1 + y_2 \\ -\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right) y_2 + y_3 \\ -y_1 - \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} y_1$$

$$y_3 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} y_1$$

$$y_1 = -\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right) y_3$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2} y_1 \\ -\frac{2}{1-\sqrt{3}i} y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \\ -\frac{2}{1-\sqrt{3}i} \end{bmatrix} y_1$$

Jadi vector eigen $\lambda = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \\ -\frac{2}{1-\sqrt{3}i} \end{bmatrix}$

Solusi umum dari persamaan [65] adalah

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-x}$$

$$+ c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \\ -\frac{2}{1+\sqrt{3}i} \end{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

$$+ c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \\ -\frac{2}{1-\sqrt{3}i} \end{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

Untuk masalah nilai awal $y_1(0) = 1 \quad y_2(0) = -1 \quad y_3(0) = 1$ maka dperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \\ -\frac{2}{1-\sqrt{3}i} \end{bmatrix}$$

$c_1 + c_3 = 1$ [78]

$-c_1 + \frac{1-\sqrt{3}i}{2} c_3 = -1$ [79]

$c_1 - \frac{2}{1-\sqrt{3}i} = 1$ [80]

Eliminasi persamaan [78] dan [79]

$c_1 + c_3 = 1$

$-c_1 + \frac{1-\sqrt{3}i}{2} c_3 = -1$ $-$

$\frac{3-\sqrt{3}i}{2} c_3 = 0$

$c_3 = 0$

Substitusi nilai $c_3 = 0$ persamaan [66]

$c_1 + c_3 = 1$

$c_1 + 0 = 1$

$c_1 = 1$

Jadi, solusi khusus dari persamaan [72] adalah

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solusi Numerik

$h = 0$

$y_1 = 1 \qquad y_2 = -1 \qquad y_3 = 1$

$h = 0{,}1 = \frac{1}{10}$

$k_{1.1} = f_1(0, 1, -1, 1) = 1(-1) = -1$

$k_{1.2} = f_2(0, 1, -1, 1) = 1(1) = 1$

$k_{1.3} = f_3(0, 1, -1, 1) = -1(1) = -1$

$$y_1 + k_{1.1} \times \frac{h}{2} = 1 + (-1)\left(\frac{\frac{1}{10}}{2}\right)$$

$$y_1 + k_{1.1} \times \frac{h}{2} = 1 - \frac{1}{20}$$

$$y_1 + k_{1.1} \times \frac{h}{2} = \frac{19}{20} = 0{,}95$$

$$y_2 + k_{1.2} \times \frac{h}{2} = -1 + (1)\left(\frac{\frac{1}{10}}{2}\right)$$

$$y_2 + k_{1.2} \times \frac{h}{2} = -1 + \frac{1}{20}$$

$$y_2 + k_{1.2} \times \frac{h}{2} = -\frac{19}{20} = -0{,}95$$

$$y_3 + k_{1.3} \times \frac{h}{2} = 1 + (-1)\left(\frac{\frac{1}{10}}{2}\right)$$

$$y_3 + k_{1.3} \times \frac{h}{2} = 1 - \frac{1}{20}$$

$$y_3 + k_{1.3} \times \frac{h}{2} = \frac{19}{20} = 0{,}95$$

$$k_{2.1} = f_1(0{,}05, 0{,}95, -0{,}95, 0{,}95) = 1(-0{,}95) = -0{,}95$$
$$k_{2.2} = f_2(0{,}05, 0{,}95, -0{,}95, 0{,}95) = 1(0{,}95) = 0{,}95$$
$$k_{2.3} = f_3(0{,}05, 0{,}95, -0{,}95, 0{,}95) = -1(0{,}95) = -0{,}95$$

$$y_1 + k_{2.1} \times \frac{h}{2} = 1 + (-0{,}95)\left(\frac{\frac{1}{10}}{2}\right)$$
$$y_1 + k_{2.1} \times \frac{h}{2} = 1 - 0{,}0475$$
$$y_1 + k_{2.1} \times \frac{h}{2} = 0{,}9525$$
$$y_2 + k_{2.2} \times \frac{h}{2} = -1 + (0{,}95)\left(\frac{\frac{1}{10}}{2}\right)$$
$$y_2 + k_{2.2} \times \frac{h}{2} = -1 + 0{,}0475$$
$$y_2 + k_{2.2} \times \frac{h}{2} = -0{,}9525$$
$$y_3 + k_{2.3} \times \frac{h}{2} = 1 + (-0{,}95)\left(\frac{\frac{1}{10}}{2}\right)$$
$$y_3 + k_{2.3} \times \frac{h}{2} = 1 - 0{,}0475$$
$$y_3 + k_{2.3} \times \frac{h}{2} = 0{,}9525$$

$$k_{3.1} = f_1(0{,}05, 0{,}9525, -0{,}9525, 0{,}9525) = 1(-0{,}9525) = -0{,}9525$$
$$k_{3.2} = f_2(0{,}05, 0{,}9525, -0{,}9525, 0{,}9525) = 1(0{,}9525) = 0{,}9525$$
$$k_{3.3} = f_3(0{,}05, 0{,}9525, -0{,}9525, 0{,}9525) = -1(0{,}9525) = -0{,}9525$$

$$y_1 + k_{3.1} \times \frac{h}{2} = 1 + (-0,9525)\left(\frac{\frac{1}{10}}{2}\right)$$

$$y_1 + k_{3.1} \times \frac{h}{2} = 1 - 0,047625$$

$$y_1 + k_{3.1} \times \frac{h}{2} = 0,952375$$

$$y_2 + k_{3.2} \times \frac{h}{2} = -1 + (0,9525)\left(\frac{\frac{1}{10}}{2}\right)$$

$$y_2 + k_{3.2} \times \frac{h}{2} = -1 + 0,047625$$

$$y_2 + k_{3.2} \times \frac{h}{2} = -0,952375$$

$$y_3 + k_{3.3} \times \frac{h}{2} = 1 + (-0,9525)\left(\frac{\frac{1}{10}}{2}\right)$$

$$y_3 + k_{3.3} \times \frac{h}{2} = 1 - 0,047625$$

$$y_3 + k_{3.3} \times \frac{h}{2} = 0,952375$$

$$k_{4.1} = f_1(0{,}1, 0,952375, -0,952375,\ \ 0,952375) = 1(-0,952375)$$
$$= -0,952375$$

$$k_{4.2} = f_2(0{,}1, 0,952375, -1,052375,\ \ 0,952375) = 1(0,952375)$$
$$= 0,952375$$

$$k_{4.3} = f_3(0{,}1, 0,952375, -1,052375,\ \ 0,952375) = -1(0,952375)$$
$$= -0,952375$$

$$y_1(h) = y_1 + \frac{1}{6}h(k_{1.1} + 2k_{2.1} + 2k_{3.1} + k_{4.1})$$

$$y_1(0{,}1) = 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{10}\right)(-1 + 2(-0,95) + 2(-0,9525) - 0,952375)$$

$$y_1(0{,}1) = 1 + \frac{1}{60}(-1 + 2(-0,95) + 2(-0,9525) - 0,952375)$$

$$y_1(0{,}1) = 1 - 0,0959520833$$

$y_1(0,1) = 0,9040479167$

$$y_2(h) = y_2 + \frac{1}{6}h(k_{1.2} + 2k_{2.2} + 2k_{3.2} + k_{4.2})$$

$$y_2(0,1) = -1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{10}\right)(1 + 2(0,95) + 2(0,9525) + 0,952375)$$

$$y_2(0,1) = -1 + \frac{1}{60}(1 + 2(0,95) + 2(0,9525) + 0,952375)$$

$$y_2(0,1) = -1 + 0,0959520833$$

$$y_2(0,1) = -0,9040479167$$

$$y_3(h) = y_3 + \frac{1}{6}h(k_{1.3} + 2k_{2.3} + 2k_{3.3} + k_{4.3})$$

$$y_3(0,1) = 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{10}\right)(-1 + 2(-0,95) + 2(-0,9525) - 0,952375)$$

$$y_3(0,1) = 1 + \frac{1}{60}(-1 + 2(-0,95) + 2(-0,9525) - 0,952375)$$

$$y_3(0,1) = 1 - 0,0959520833$$

$$y_3(0,1) = 0,9040479167$$

$$h = 0,025 = \frac{1}{40}$$

$$k_{1.1} = f_1(0,025, 1, -1, 1) = 1(-1) = -1$$

$$k_{1.2} = f_2(0,025, 1, -1, 1) = 1(1) = 1$$

$$k_{1.3} = f_3(0,025, 1, -1, 1) = -1(1) = -1$$

$$y_1 + k_{1.1} \times \frac{h}{2} = 1 + (-1)\left(\frac{\frac{1}{40}}{2}\right)$$

$$y_1 + k_{1.1} \times \frac{h}{2} = 1 - \frac{1}{80}$$

$$y_1 + k_{1.1} \times \frac{h}{2} = \frac{79}{80} = 0,9875$$

$$y_2 + k_{1.2} \times \frac{h}{2} = -1 + (1)\left(\frac{\frac{1}{40}}{2}\right)$$

$$y_2 + k_{1.2} \times \frac{h}{2} = -1 + \frac{1}{80}$$

$$y_2 + k_{1.2} \times \frac{h}{2} = -\frac{79}{80} = -0{,}9875$$

$$y_3 + k_{1.3} \times \frac{h}{2} = 1 + (-1)\left(\frac{\frac{1}{40}}{2}\right)$$

$$y_3 + k_{1.3} \times \frac{h}{2} = 1 - \frac{1}{80}$$

$$y_3 + k_{1.3} \times \frac{h}{2} = \frac{79}{80} = 0{,}9875$$

$$k_{2.1} = f_1(0{,}0125, 0{,}9875, -0{,}9875, 0{,}9875) = 1(-0{,}9875)$$
$$= -0{,}9875$$
$$k_{2.2} = f_2(0{,}0125, 0{,}9875, -0{,}9875, 0{,}9875) = 1(0{,}9875) = 0{,}9875$$
$$k_{2.3} = f_3(0{,}0125, 0{,}9875, -0{,}9875, 0{,}9875) = -1(0{,}9875)$$
$$= -0{,}9875$$

$$y_1 + k_{2.1} \times \frac{h}{2} = 1 + (-0{,}9875)\left(\frac{\frac{1}{40}}{2}\right)$$

$$y_1 + k_{2.1} \times \frac{h}{2} = 1 - 0{,}09875$$

$$y_1 + k_{2.1} \times \frac{h}{2} = 0{,}90125$$

$$y_2 + k_{2.2} \times \frac{h}{2} = -1 + (0{,}9875)\left(\frac{\frac{1}{40}}{2}\right)$$

$$y_2 + k_{2.2} \times \frac{h}{2} = -1 + 0{,}09875$$

$$y_2 + k_{2.2} \times \frac{h}{2} = -0{,}90125$$

$$y_3 + k_{2.3} \times \frac{h}{2} = 1 + (-0{,}9875)\left(\frac{\frac{1}{40}}{2}\right)$$

$$y_3 + k_{2.3} \times \frac{h}{2} = 1 - 0{,}09875$$

$$y_3 + k_{2.3} \times \frac{h}{2} = 0{,}90125$$

$$k_{3.1} = f_1(0{,}0125, 0{,}90125, -0{,}90125, 0{,}90125) = 1(-0{,}90125)$$
$$= -0{,}90125$$
$$k_{3.2} = f_2(0{,}0125, 0{,}90125, -0{,}90125, 0{,}90125) = 1(0{,}90125)$$
$$= 0{,}90125$$
$$k_{3.3} = f_3(0{,}0125, 0{,}90125, -0{,}90125, 0{,}90125) = -1(0{,}90125)$$
$$= -0{,}90125$$

$$y_1 + k_{3.1} \times \frac{h}{2} = 1 + (-0{,}90125)\left(\frac{\frac{1}{40}}{2}\right)$$

$$y_1 + k_{3.1} \times \frac{h}{2} = 1 - 0{,}011265625$$

$$y_1 + k_{3.1} \times \frac{h}{2} = 0{,}988734375$$

$$y_2 + k_{3.2} \times \frac{h}{2} = -1 + (0{,}90125)\left(\frac{\frac{1}{40}}{2}\right)$$

$$y_2 + k_{3.2} \times \frac{h}{2} = -1 + 0{,}011265625$$

$$y_2 + k_{3.2} \times \frac{h}{2} = -0{,}988734375$$

$$y_3 + k_{3.3} \times \frac{h}{2} = 1 + (-0{,}90125)\left(\frac{\frac{1}{40}}{2}\right)$$

$$y_3 + k_{3.3} \times \frac{h}{2} = 1 - 0{,}011265625$$

$$y_3 + k_{3.3} \times \frac{h}{2} = 0{,}988734375$$

$$k_{4.1} = f_1(0{,}025, 0{,}988734375, -0{,}988734375, 0{,}988734375)$$
$$= 1(-0{,}988734375) = -0{,}988734375$$
$$k_{4.2} = f_2(0{,}025, 0{,}988734375, -0{,}988734375, 0{,}988734375)$$
$$= 1(0{,}988734375) = 0{,}988734375$$
$$k_{4.3} = f_3(0{,}025, 0{,}988734375, -0{,}988734375, 0{,}988734375)$$
$$= -1(0{,}988734375) = -0{,}988734375$$

$$y_1(h) = y_1 + \frac{1}{6}h(k_{1.1} + 2k_{2.1} + 2k_{3.1} + k_{4.1})$$
$$y_1(0{,}025) = 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{40}\right)(-1 + 2(-0{,}9875) + 2(-0{,}90125) - 0{,}988734375)$$
$$y_1(0{,}025) = 1 + \frac{1}{240}(-1 + 2(-0{,}9875) + 2(-0{,}90125) - 0{,}988734375)$$
$$y_1(0{,}025) = 1 - 0{,}0240259766$$
$$y_1(0{,}025) = 0{,}9759740234$$

$$y_2(h) = y_2 + \frac{1}{6}h(k_{1.2} + 2k_{2.2} + 2k_{3.2} + k_{4.2})$$
$$y_2(0{,}025) = -1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{40}\right)(1 + 2(0{,}9875) + 2(0{,}90125) + 0{,}988734375)$$
$$y_2(0{,}025) = -1 + \frac{1}{240}(1 + 2(0{,}9875) + 2(0{,}90125) + 0{,}988734375)$$
$$y_2(0{,}025) = -1 + 0{,}0240259766$$

$$y_2(0{,}025) = -0{,}9759740234$$

$$y_3(h) = y_3 + \frac{1}{6}h(k_{1.3} + 2k_{2.3} + 2k_{3.3} + k_{4.3})$$

$$y_3(0{,}025) = 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{40}\right)(-1 + 2(-0{,}9875) + 2(-0{,}90125) - 0{,}988734375)$$

$$y_3(0{,}025) = 1 + \frac{1}{240}(-1 + 2(-0{,}9875) + 2(-0{,}90125) - 0{,}988734375)$$

$$y_3(0{,}025) = 1 - 0{,}0240259766$$

$$y_3(0{,}025) = 0.9759740234$$

$$h = 0{,}01 = \frac{1}{100}$$

$$k_{1.1} = f_1(0, 1, -1, 1) = 1(-1) = -1$$

$$k_{1.2} = f_2(0, 1, -1, 1) = 1(1) = 1$$

$$k_{1.3} = f_3(0, 1, -1, 1) = -1(1) = -1$$

$$y_1 + k_{1.1} \times \frac{h}{2} = 1 + (-1)\left(\frac{\frac{1}{100}}{2}\right)$$

$$y_1 + k_{1.1} \times \frac{h}{2} = 1 - \frac{1}{200}$$

$$y_1 + k_{1.1} \times \frac{h}{2} = \frac{199}{200} = 0{,}995$$

$$y_2 + k_{1.2} \times \frac{h}{2} = -1 + (1)\left(\frac{\frac{1}{100}}{2}\right)$$

$$y_2 + k_{1.2} \times \frac{h}{2} = -1 + \frac{1}{200}$$

$$y_2 + k_{1.2} \times \frac{h}{2} = \frac{199}{200} = -0{,}995$$

$$y_3 + k_{1.3} \times \frac{h}{2} = 1 + (-1)\left(\frac{\frac{1}{100}}{2}\right)$$

$$y_3 + k_{1.3} \times \frac{h}{2} = 1 - \frac{1}{200}$$

$$y_3 + k_{1.3} \times \frac{h}{2} = \frac{199}{200} = 0{,}995$$

$$k_{2.1} = f_1(0{,}005, 0{,}995, -0{,}995, 0{,}995) = 1(-0{,}995) = -0{,}995$$

$$k_{2.2} = f_2(0{,}005, 0{,}995, -0{,}995, 0{,}995) = 1(0{,}995) = 0{,}995$$

$$k_{2.3} = f_3(0{,}005, 0{,}995, -0{,}995, 0{,}995) = -1(0{,}995) = -0{,}995$$

$$y_1 + k_{2.1} \times \frac{h}{2} = 1 + (-0{,}995)\left(\frac{\frac{1}{100}}{2}\right)$$

$$y_1 + k_{2.1} \times \frac{h}{2} = 1 - 0{,}004975$$

$$y_1 + k_{2.1} \times \frac{h}{2} = 0{,}995025$$

$$y_2 + k_{2.2} \times \frac{h}{2} = -1 + (0{,}995)\left(\frac{\frac{1}{100}}{2}\right)$$

$$y_2 + k_{2.2} \times \frac{h}{2} = -1 + 0{,}004975$$

$$y_2 + k_{2.2} \times \frac{h}{2} = -0{,}995025$$

$$y_3 + k_{2.3} \times \frac{h}{2} = 1 + (-0{,}995)\left(\frac{\frac{1}{100}}{2}\right)$$

$$y_3 + k_{2.3} \times \frac{h}{2} = 1 - 0{,}004975$$

$$y_3 + k_{2.3} \times \frac{h}{2} = 0{,}995025$$

$$k_{3.1} = f_1(0{,}005, 0{,}995025, -0{,}995025, 0{,}995025) = 1(-0{,}995025)$$
$$= -0{,}995025$$
$$k_{3.2} = f_2(0{,}005, 0{,}995025, -0{,}995025, 0{,}995025) = 1(0{,}995025)$$
$$= 0{,}995025$$
$$k_{3.3} = f_3(0{,}005, 0{,}995025, -0{,}995025, 0{,}995025) = -1(0{,}995025)$$
$$= -0{,}995025$$

$$y_1 + k_{3.1} \times \frac{h}{2} = 1 + (-0{,}995025)\left(\frac{\frac{1}{100}}{2}\right)$$
$$y_1 + k_{3.1} \times \frac{h}{2} = 1 - 0{,}004975125$$
$$y_1 + k_{3.1} \times \frac{h}{2} = 0{,}995024875$$
$$y_2 + k_{3.2} \times \frac{h}{2} = -1 + (0{,}995025)\left(\frac{\frac{1}{100}}{2}\right)$$
$$y_2 + k_{3.2} \times \frac{h}{2} = -1 + 0{,}004975125$$
$$y_2 + k_{3.2} \times \frac{h}{2} = -0{,}995024875$$
$$y_3 + k_{3.3} \times \frac{h}{2} = 1 + (-0{,}995025)\left(\frac{\frac{1}{100}}{2}\right)$$
$$y_3 + k_{3.3} \times \frac{h}{2} = 1 - 0{,}004975125$$
$$y_3 + k_{3.3} \times \frac{h}{2} = 0{,}995024875$$

$$k_{4.1} = f_1(0{,}01, 0{,}995024875, -0{,}995024875, 0{,}995024875)$$
$$= 1(-0{,}995024875) = -0{,}995024875$$
$$k_{4.2} = f_2(0{,}01, 0{,}995024875, -0{,}995024875, 0{,}995024875)$$
$$= 1(0{,}995024875) = 0{,}995024875$$

$$k_{4.3} = f_3(0{,}01, 0{,}995024875, -0{,}995024875, 0{,}995024875)$$
$$= -1(\ 0{,}995024875) = \ -0{,}995024875$$

$$y_1(h) = y_1 + \frac{1}{6}h(k_{1.1} + 2k_{2.1} + 2k_{3.1} + k_{4.1})$$
$$y_1(0{,}01) = 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{100}\right)(-1 + 2(-0{,}995) + 2(-0{,}995025)$$
$$- 0{,}995024875)$$
$$y_1(0{,}01) = 1 + \frac{1}{600}(-1 + 2(-0{,}995) + 2(-0{,}995025)$$
$$- 0{,}995024875)$$
$$y_1(0{,}01) = 1 - 0{,}0099584581$$
$$y_1(0{,}01) = 0{,}9900415419$$

$$y_2(h) = y_2 + \frac{1}{6}h(k_{1.2} + 2k_{2.2} + 2k_{3.2} + k_{4.2})$$
$$y_2(0{,}01) = -1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{100}\right)(1 + 2(0{,}85) + 2(0{,}8725) + 0{,}869125)$$
$$y_2(0{,}01) = -1$$
$$+ \frac{1}{600}(1 + 2(0{,}995) + 2(0{,}995025) + 0{,}995024875)$$
$$y_2(0{,}01) = -1 + 0{,}0099584581$$
$$y_2(0{,}01) = -0{,}9900415419$$

$$y_3(h) = y_3 + \frac{1}{6}h(k_{1.3} + 2k_{2.3} + 2k_{3.3} + k_{4.3})$$
$$y_3(0{,}3) = 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{100}\right)(-1 + 2(-0{,}995) + 2(-0{,}995025)$$
$$- 0{,}995024875)$$
$$y_3(0{,}3) = 1 + \frac{1}{600}(-1 + 2(-0{,}995) + 2(-0{,}995025)$$
$$- 0{,}995024875)$$
$$y_3(0{,}3) = 1 - 0{,}0099584581$$
$$y_3(0{,}3) = 0{,}9900415419$$

$$h = 0{,}005 = \frac{1}{200}$$

$$k_{1.1} = f_1(0, 1, -1, 1) = 1(-1) = -1$$

$$k_{1.2} = f_2(0, 1, -1, 1) = 1(1) = 1$$

$$k_{1.3} = f_3(0, 1, -1, 1) = -1(1) = -1$$

$$y_1 + k_{1.1} \times \frac{h}{2} = 1 + (-1)\left(\frac{\frac{1}{200}}{2}\right)$$

$$y_1 + k_{1.1} \times \frac{h}{2} = 1 - \frac{1}{400}$$

$$y_1 + k_{1.1} \times \frac{h}{2} = \frac{399}{400} = 0{,}9975$$

$$y_2 + k_{1.2} \times \frac{h}{2} = -1 + (1)\left(\frac{\frac{1}{200}}{2}\right)$$

$$y_2 + k_{1.2} \times \frac{h}{2} = -1 + \frac{1}{400}$$

$$y_2 + k_{1.2} \times \frac{h}{2} = -\frac{399}{400} = -0{,}9975$$

$$y_3 + k_{1.3} \times \frac{h}{2} = 1 + (-1)\left(\frac{\frac{1}{200}}{2}\right)$$

$$y_3 + k_{1.3} \times \frac{h}{2} = 1 - \frac{1}{400}$$

$$y_3 + k_{1.3} \times \frac{h}{2} = \frac{399}{400} = 0{,}9975$$

$$k_{2.1} = f_1(0{,}0025, 0{,}9975, -0{,}9975, 0{,}9975) = 1(-0{,}9975)$$
$$= -0{,}9975$$

$$k_{2.2} = f_2(0{,}0025, 0{,}9975, -0{,}9975, 0{,}9975) = 1(0{,}9975) = 0{,}9975$$

$$k_{2.3} = f_3(0{,}0025, 0{,}9975, -0{,}9975, 0{,}9975) = -1(0{,}9975)$$
$$= -0{,}9975$$

$$y_1 + k_{2.1} \times \frac{h}{2} = 1 + (-0{,}9975)\left(\frac{\frac{1}{200}}{2}\right)$$

$$y_1 + k_{2.1} \times \frac{h}{2} = 1 - 0{,}00249375$$

$$y_1 + k_{2.1} \times \frac{h}{2} = 0{,}99750625$$

$$y_2 + k_{2.2} \times \frac{h}{2} = -1 + (0{,}9975)\left(\frac{\frac{1}{200}}{2}\right)$$

$$y_2 + k_{2.2} \times \frac{h}{2} = -1 + 0{,}00249375$$

$$y_2 + k_{2.2} \times \frac{h}{2} = -0{,}99750625$$

$$y_3 + k_{2.3} \times \frac{h}{2} = 1 + (-0{,}9975)\left(\frac{\frac{1}{200}}{2}\right)$$

$$y_3 + k_{2.3} \times \frac{h}{2} = 1 - 0{,}00249375$$

$$y_3 + k_{2.3} \times \frac{h}{2} = 0{,}99750625$$

$$\begin{aligned} k_{3.1} &= f_1(0{,}0025, 0{,}99750625, -0{,}99750625, 0{,}99750625) \\ &= 1(-0{,}99750625) = -0{,}99750625 \\ k_{3.2} &= f_2(0{,}0025, 0{,}99750625, -0{,}99750625, 0{,}99750625) \\ &= 1(0{,}99750625) = 0{,}99750625 \\ k_{3.3} &= f_3(0{,}0025, 0{,}99750625, -0{,}99750625, 0{,}99750625) \\ &= -1(0{,}99750625) = -0{,}99750625 \end{aligned}$$

$$y_1 + k_{3.1} \times \frac{h}{2} = 1 + (-0{,}99750625)\left(\frac{\frac{1}{200}}{2}\right)$$

$$y_1 + k_{3.1} \times \frac{h}{2} = 1 - 0{,}0024937656$$

$$y_1 + k_{3.1} \times \frac{h}{2} = 0{,}9975062344$$

$$y_2 + k_{3.2} \times \frac{h}{2} = -1 + (0{,}99750625)\left(\frac{\frac{1}{200}}{2}\right)$$

$$y_2 + k_{3.2} \times \frac{h}{2} = -1 + 0{,}0024937656$$

$$y_2 + k_{3.2} \times \frac{h}{2} = -0{,}9975062344$$

$$y_3 + k_{3.3} \times \frac{h}{2} = 1 + (-0{,}99750625)\left(\frac{\frac{1}{200}}{2}\right)$$

$$y_3 + k_{3.3} \times \frac{h}{2} = 1 - 0{,}0024937656$$

$$y_3 + k_{3.3} \times \frac{h}{2} = 0{,}9975062344$$

$$k_{4.1} = f_1(0{,}005, 0{,}9975062344, -0{,}9975062344, 0{,}9975062344)$$
$$= 1(-0{,}9975062344) = -0{,}9975062344$$

$$k_{4.2} = f_2(0{,}005, 0{,}9975062344, -0{,}9975062344, 0{,}9975062344)$$
$$= 1(0{,}9975062344) = 0{,}9975062344$$

$$k_{4.3} = f_3(0{,}005, 0{,}9975062344, -0{,}9975062344, 0{,}9975062344)$$
$$= -1(0{,}9975062344) = -0{,}9975062344$$

$$y_1(h) = y_1 + \frac{1}{6}h(k_{1.1} + 2k_{2.1} + 2k_{3.1} + k_{4.1})$$

$$y_1(0{,}005) = 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{200}\right)(-1 + 2(-0{,}9975) + 2(-0{,}99750625) - 0{,}9975062344)$$

$$y_1(0{,}005) = 1 + \frac{1}{1200}(-1 + 2(-0{,}9975) + 2(-0{,}99750625) - 0{,}9975062344)$$

$y_1(0{,}005) = 1 - 0{,}0049895989$

$y_1(0{,}005) = 0{,}9950104011$

$$y_2(h) = y_2 + \frac{1}{6}h(k_{1.2} + 2k_{2.2} + 2k_{3.2} + k_{4.2})$$

$$y_2(0{,}005) = -1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{200}\right)(1 + 2(0{,}9975) + 2(0{,}99750625) + 0{,}9975062344)$$

$$y_2(0{,}005) = -1 + \frac{1}{1200}(1 + 2(0{,}9975) + 2(0{,}99750625) + 0{,}9975062344)$$

$y_2(0{,}005) = -1 + 0{,}0049895989$

$y_2(0{,}005) = -0{,}9950104011$

$$y_3(h) = y_3 + \frac{1}{6}h(k_{1.3} + 2k_{2.3} + 2k_{3.3} + k_{4.3})$$

$$y_3(0{,}005) = 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{200}\right)(-1 + 2(-0{,}9975) + 2(-0{,}99750625) - 0{,}9975062344)$$

$$y_3(0{,}005) = 1 + \frac{1}{1200}(-1 + 2(-0{,}9975) + 2(-0{,}99750625) - 0{,}9975062344)$$

$y_3(0{,}005) = 1 - 0{,}0049895989$

$y_3(0{,}005) = 0{,}9950104011$

Solusi soal no 2)

$y''' + 5y'' + 7y' + 3y = 0$

$y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \qquad y''(0) = -1$

Solusi Eksak $y(x) = e^{-x} + xe^{-x}$

$y''' = -5y'' - 7y' - 3y$ langkah 1

$y_1 = y$

$y_2 = y'$ langkah 2

$y_3 = y''$

$y''' = -5y'' - 7y' - 3y = -5y_3 - 7y_2 - 3y_1$

$y_1' = 0y_1 + 1y_2 + 0y_3$

$y_2' = 0y_1 + 0y_2 + 1y_3$ langkah 3

$y_3' = -3y_1 - 7y_2 - 5y_3$

$\frac{dy_1}{dx} = y_2 \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3 \quad \frac{dy_3}{dx} = -3y_1 - 7y_2 - 5y_3$

$y_1 = 1 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = -1$

Solusi Eksak

$y_1' = 0y_1 + 1y_2 + 0y_3$

$y_2' = 0y_1 + 0y_2 + 1y_3$ [81]

$y_3' = -3y_1 - 7y_2 - 5y_3$

Persamaan [81] dapat dibentuk matriks A menjadi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

Untuk mendapatkan nilai eigen haruslah memenuhi

$$|A - I\lambda| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -7 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda \right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-3 & -7 & -5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\0 & \lambda & 0\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}\right|=0$$

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\0 & -\lambda & 1\\-3 & -7 & -5\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0 & -\lambda & 1\\0 & -\lambda & 1 & 0 & -\lambda\\-3 & -7 & -5-\lambda & -3 & -7\end{vmatrix}=0$$

$-\lambda^3 - 5\lambda^3 - 3 + 0 - (0 + 7\lambda + 0) = 0$

$-\lambda^3 - 5\lambda^3 - 7\lambda - 3 = 0$

$(\lambda + 1)(\lambda + 1)(-\lambda - 3) = 0$

$(\lambda + 1) = 0$ atau $(-\lambda - 3) = 0$

$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -1 \qquad \lambda = -3$

Untuk $\lambda_1 = -1$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\-3 & -7 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1 + y_2\\y_2 + y_3\\-3y_1 - 7y_2 - 4y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$y_1 + y_2 = 0$ [82]

$y_2 + y_3 = 0$ [83]

$-3y_1 - 7y_2 - 4y_3 = 0$ [84]

Eliminasi persamaan [82] dan [84]

$$\begin{array}{ll|l|r}
y_2 + y_3 = 0 & & \times 7 & 7y_2 + 7y_3 = 0 \\
-3y_1 - 7y_2 - 4y_3 = 0 & & \times 1 & -3y_1 - 7y_2 - 4y_3 = 0 \\ \cline{4-4}
& & & -3y_1 + 3y_3 = 0 \quad + \\
& & & y_1 = y_3
\end{array}$$

$y_1 = -y_2$ [85]

$y_2 = -y_3$ [86]

$y_1 = y_3$ [87]

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ -y_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} y_1$$

Jadi vector eigen $\lambda_1 = -1$ adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ y_2 + y_3 \\ -3y_1 - 7y_2 - 4y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$y_1 + y_2 = 1$ [88]

$y_2 + y_3 = -1$ [89]

$-3y_1 - 7y_2 - 4y_3 = 1$ [90]

Pilih $y_3 = -1$ maka

$y_2 + y_3 = -1$

$y_2 + (-1) = -1$

$y_2 = 0$

$-3y_1 - 7y_2 - 4y_3 = 1$

$-3y_1 - 7(0) - 4(-1) = 1$

$-3y_1 - 0 + 4 = 1$

$y_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \\ -y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} y_1$$

Jadi vector eigen $\lambda = -1$ adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda_2 = -3$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & -7 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3y_1 + y_2 \\ 3y_2 + y_3 \\ -3y_1 - 7y_2 - 2y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$3y_1 + y_2 = 0 \qquad [91]$$

$$3y_2 + y_3 = 0 \qquad [92]$$

$$-3y_1 - 7y_2 - 2y_3 = 0 \qquad [93]$$

Eliminasi persamaan [91] dan [93]

$$\begin{array}{ll|l|r} 3y_1 + y_2 = 0 & & \times 7 & 21y_2 + 7y_3 = 0 \\ -3y_1 - 7y_2 - 2y_3 = 0 & & \times 3 & -9y_1 - 21y_2 - 6y_3 = 0 \\ \hline & & & -9y_1 + y_3 = 0 \\ & & & 9y_1 = y_3 \end{array} \; +$$

$$-3y_1 = y_2$$

$$-3y_2 = y_3$$

$$9y_1 = y_3$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ -3y_1 \\ 9y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix} y_1$$

Jadi vector eigen $\lambda = -3$ adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$

Solusi umum dari persamaan [69] adalah

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-x} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-x} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix} e^{-3x}$$

Untuk masalah nilai awal $y_1(0) = 1$ $y_2(0) = 0$ $y_3(0) = -1$ maka dperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$c_1 + c_2 + c_3 = 1$ [92]

$-c_1 - 3c_3 = 0$ [93]

$c_1 - c_2 + 9c_3 = -1$ [94]

$-c_1 - 3c_3 = 0$

$c_1 = -3c_3$ [95]

Substitusi persamaan [95] ke persamaan [92] dan [94]

$c_1 + c_2 + c_3 = 1$

$-3c_3 + c_2 + c_3 = 1$

$c_2 - 2c_3 = 1$ [96]

$c_1 - c_2 + 9c_3 = -1$

$-3c_3 - c_2 + 9c_3 = -1$

$-c_2 + 6c_3 = -1$ [97]

Eliminasi persamaan [83] dan [84]

$c_2 - 2c_3 = 1$

$-c_2 + 6c_3 = -1$ +

$4c_3 = 0$

$c_3 = 0$

Substitusi ke persamaan [95]

$c_1 = -3c_3 = -3(0) = 0$

Substitusi nilai c_2 dan c_3 ke persamaan [92]

$c_1 + c_2 + c_3 = 1$

$0 + c_2 + 0 = 1$

$c_2 = 1$

Jadi, solusi khusus dari persamaan [79] adalah

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solusi Numerik

$h = 0$

$y_1 = 1 \qquad\qquad y_2 = 0 \qquad\qquad y_3 = -1$

$h = 0{,}1 = \frac{1}{10}$

$k_{1.1} = f_1(0, 1, 0, -1) = 1(0) = 0$

$k_{1.2} = f_2(0, 1, 0, -1) = 1(-1) = -1$

$k_{1.3} = f_3(0, 1, 0, -1) = -3(1) - 7(0) - 5(-1) = -3 + 5 = 2$

$$y_1 + k_{1.1} \times \frac{h}{2} = 1 + (0)\left(\frac{\frac{1}{10}}{2}\right)$$

$$y_1 + k_{1.1} \times \frac{h}{2} = 1$$

$$y_1 + k_{1.1} \times \frac{h}{2} = 1$$

$$y_2 + k_{1.2} \times \frac{h}{2} = 0 + (-1)\left(\frac{\frac{1}{10}}{2}\right)$$

$$y_2 + k_{1.2} \times \frac{h}{2} = 0 - \frac{1}{20}$$

$$y_2 + k_{1.2} \times \frac{h}{2} = -\frac{1}{20} = -0{,}05$$

$$y_3 + k_{1.3} \times \frac{h}{2} = -1 + (2)\left(\frac{\frac{1}{10}}{2}\right)$$

$$y_3 + k_{1.3} \times \frac{h}{2} = -1 + \frac{1}{10}$$

$$y_3 + k_{1.3} \times \frac{h}{2} = -\frac{9}{10} = -0{,}9$$

$k_{2.1} = f_1(0{,}05, 1, -0{,}05, -0{,}9) = 1(-0{,}05) = -0{,}05$

$$k_{2.2} = f_2(0{,}05, 1, -0{,}05, -0{,}9) = 1(-0{,}9) = -0{,}9$$

$$k_{2.3} = f_3(0{,}05, 1, -0{,}05, -0{,}9) = -3(1) - 7(-0{,}05) - 5(-0{,}9)$$

$$= 1{,}85$$

$$y_1 + k_{2.1} \times \frac{h}{2} = 1 + (-0{,}05)\left(\frac{\frac{1}{10}}{2}\right)$$

$$y_1 + k_{2.1} \times \frac{h}{2} = 1 - 0{,}0025$$

$$y_1 + k_{2.1} \times \frac{h}{2} = 0{,}9975$$

$$y_2 + k_{2.2} \times \frac{h}{2} = 0 + (-0{,}9)\left(\frac{\frac{1}{10}}{2}\right)$$

$$y_2 + k_{2.2} \times \frac{h}{2} = 0 - 0{,}045$$

$$y_2 + k_{2.2} \times \frac{h}{2} = -0{,}045$$

$$y_3 + k_{2.3} \times \frac{h}{2} = -1 + (1{,}85)\left(\frac{\frac{1}{10}}{2}\right)$$

$$y_3 + k_{2.3} \times \frac{h}{2} = -1 + 0{,}0925$$

$$y_3 + k_{2.3} \times \frac{h}{2} = -0{,}9075$$

$$k_{3.1} = f_1(0{,}05, 0{,}9975, -0{,}045, -0{,}9075) = 1(-0{,}045) = -0{,}045$$

$$k_{3.2} = f_2(0{,}05, 0{,}9975, -0{,}045, -0{,}9075) = 1(-0{,}9075) = -0{,}9075$$

$$k_{3.3} = f_3(0{,}05, 0{,}9975, -0{,}045, -0{,}9075)$$

$$= -3(0{,}9975) - 7(-0{,}045) - 5(-0{,}9075)$$

$$= -0{,}9525 = 1{,}86$$

$$y_1 + k_{3.1} \times \frac{h}{2} = 1 + (-0{,}045)\left(\frac{\frac{1}{10}}{2}\right)$$

$$y_1 + k_{3.1} \times \frac{h}{2} = 1 - 0{,}00225$$

$$y_1 + k_{3.1} \times \frac{h}{2} = 0{,}99775$$

$$y_2 + k_{3.2} \times \frac{h}{2} = 0 + (-0{,}9075)\left(\frac{\frac{1}{10}}{2}\right)$$

$$y_2 + k_{3.2} \times \frac{h}{2} = 0 - 0{,}045375$$

$$y_2 + k_{3.2} \times \frac{h}{2} = -0{,}045375$$

$$y_3 + k_{3.3} \times \frac{h}{2} = -1 + (1{,}86)\left(\frac{\frac{1}{10}}{2}\right)$$

$$y_3 + k_{3.3} \times \frac{h}{2} = -1 + 0{,}093$$

$$y_3 + k_{3.3} \times \frac{h}{2} = -0{,}907$$

$$k_{4.1} = f_1(0{,}1, 0{,}99775, -0{,}045375, -0{,}907) = 1(-0{,}045375)$$

$$= -0{,}045375$$

$$k_{4.2} = f_2(0{,}1, 0{,}99775, -0{,}045375, -0{,}907) = 1(-0{,}907) = -0{,}907$$

$$k_{4.3} = f_3(0{,}1, 0{,}99775, -0{,}045375, -0{,}907)$$

$$= -3(0{,}99775) - 7(-0{,}045375) - 5(-0{,}907)$$

$$= 1{,}859375$$

$$y_1(h) = y_1 + \frac{1}{6}h(k_{1.1} + 2k_{2.1} + 2k_{3.1} + k_{4.1})$$

$$y_1(0{,}1) = 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{10}\right)(0 + 2(-0{,}05) + 2(-0{,}045) - 0{,}045375)$$

$$y_1(0{,}1) = 1 + \frac{1}{60}(0 + 2(-0{,}05) + 2(-0{,}045) - 0{,}045375)$$

$$y_1(0{,}1) = 1 - 0{,}0039229167$$

$$y_1(0,1) = 0,9960770833$$

$$y_2(h) = y_2 + \frac{1}{6}h(k_{1.2} + 2k_{2.2} + 2k_{3.2} + k_{4.2})$$

$$y_2(0,1) = 0 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{10}\right)(-1 + 2(-0,9) + 2(-0,9075) - 0,907)$$

$$y_2(0,1) = 0 + \frac{1}{60}(-1 + 2(-0,9) + 2(-0,9075) - 0,907)$$

$$y_2(0,1) = 0 - 0,0920333333$$

$$y_2(0,1) = -0,0920333333$$

$$y_3(h) = y_3 + \frac{1}{6}h(k_{1.3} + 2k_{2.3} + 2k_{3.3} + k_{4.3})$$

$$y_3(0,1) = -1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{10}\right)(2 + 2(1,85) + 2(1,86) + 1,859375)$$

$$y_3(0,1) = -1 + \frac{1}{60}(2 + 2(1,85) + 2(1,86) + 1,859375)$$

$$y_3(0,1) = -1 + 0,1879895667$$

$$y_3(0,1) = -0,8120104333$$

$$h = 0,025 = \frac{1}{40}$$

$$k_{1.1} = f_1(0, 1, 0, -1) = 1(0) = 0$$

$$k_{1.2} = f_2(0, 1, 0, -1) = 1(-1) = -1$$

$$k_{1.3} = f_3(0, 1, 0, -1) = -3(1) - 7(0) - 5(-1) = 2$$

$$y_1 + k_{1.1} \times \frac{h}{2} = 1 + (0)\left(\frac{\frac{1}{40}}{2}\right)$$

$$y_1 + k_{1.1} \times \frac{h}{2} = 1 + 0$$

$$y_1 + k_{1.1} \times \frac{h}{2} = 1$$

$$y_2 + k_{1.2} \times \frac{h}{2} = 0 + (-1)\left(\frac{\frac{1}{40}}{2}\right)$$

$$y_2 + k_{1.2} \times \frac{h}{2} = 0 - \frac{1}{80}$$

$$y_2 + k_{1.2} \times \frac{h}{2} = -\frac{1}{80} = -0{,}0125$$

$$y_3 + k_{1.3} \times \frac{h}{2} = -1 + (2)\left(\frac{\frac{1}{40}}{2}\right)$$

$$y_3 + k_{1.3} \times \frac{h}{2} = -1 + \frac{1}{40}$$

$$y_3 + k_{1.3} \times \frac{h}{2} = -\frac{39}{40} = -0{,}975$$

$$k_{2.1} = f_1(0{,}0125, 1, -0{,}0125, -0{,}975) = 1(-0{,}0125) = -0{,}0125$$

$$k_{2.2} = f_2(0{,}0125, 1, -0{,}0125, -0{,}975) = 1(-0{,}975) = -0{,}975$$

$$\begin{aligned} k_{2.3} &= f_3(0{,}0125, 1, -0{,}0125, -0{,}975) \\ &= -3(1) - 7(-0{,}0125) - 5(-0{,}975) = 1{,}9625 \end{aligned}$$

$$y_1 + k_{2.1} \times \frac{h}{2} = 1 + (-0{,}0125)\left(\frac{\frac{1}{40}}{2}\right)$$

$$y_1 + k_{2.1} \times \frac{h}{2} = 1 - 0{,}00015625$$

$$y_1 + k_{2.1} \times \frac{h}{2} = 0{,}99984375$$

$$y_2 + k_{2.2} \times \frac{h}{2} = 0 + (-0{,}975)\left(\frac{\frac{1}{40}}{2}\right)$$

$$y_2 + k_{2.2} \times \frac{h}{2} = 0 - 0{,}0121875$$

$$y_2 + k_{2.2} \times \frac{h}{2} = -0{,}0121875$$

$$y_3 + k_{2.3} \times \frac{h}{2} = -1 + (1{,}9625)\left(\frac{\frac{1}{40}}{2}\right)$$

$$y_3 + k_{2.3} \times \frac{h}{2} = -1 + 0{,}02453125$$

$$y_3 + k_{2.3} \times \frac{h}{2} = -0{,}97546875$$

$$k_{3.1} = f_1(0{,}0125, 0{,}99984375, -0{,}0121875, -0{,}97546875)$$
$$= 1(-0{,}0121875) = -0{,}0121875$$
$$k_{3.2} = f_2(0{,}0125, 0{,}99984375, -0{,}0121875, -0{,}97546875)$$
$$= 1(-0{,}97546875) = -0{,}97546875$$
$$k_{3.3} = f_3(0{,}0125, 0{,}99984375, -0{,}0121875, -0{,}97546875)$$
$$= -3(0{,}99984375) - 7(-0{,}0121875)$$
$$- 5(-0{,}97546875) = 1{,}963125$$

$$y_1 + k_{3.1} \times \frac{h}{2} = 1 + (-0{,}0121875)\left(\frac{\frac{1}{40}}{2}\right)$$

$$y_1 + k_{3.1} \times \frac{h}{2} = 1 - 0{,}0001523438$$

$$y_1 + k_{3.1} \times \frac{h}{2} = 0{,}9998476563$$

$$y_2 + k_{3.2} \times \frac{h}{2} = 0 + (-0{,}97546875)\left(\frac{\frac{1}{40}}{2}\right)$$

$$y_2 + k_{3.2} \times \frac{h}{2} = 0 - 0{,}0121933594$$

$$y_2 + k_{3.2} \times \frac{h}{2} = -0{,}0121933594$$

$$y_3 + k_{3.3} \times \frac{h}{2} = -1 + (1{,}963125)\left(\frac{\frac{1}{40}}{2}\right)$$

$$y_3 + k_{3.3} \times \frac{h}{2} = -1 + 0{,}0245390625$$

$$y_3 + k_{3.3} \times \frac{h}{2} = -0{,}9754609375$$

$$k_{4.1} = f_1(0{,}025, 0{,}9998476563, -0{,}0121933594, -0{,}9754609375)$$
$$= 1(-0{,}0121933594) = -0{,}0121933594$$
$$k_{4.2} = f_2(0{,}025, 0{,}9998476563, -0{,}0121933594, -0{,}9754609375)$$
$$= 1(-0{,}0121933594) = -0{,}0121933594$$
$$k_{4.3} = f_3(0{,}025, 0{,}9998476563, -0{,}0121933594\ - 0{,}9754609375)$$
$$= -3(0{,}9998476563) - 7(\ -0{,}0121933594)$$
$$- 5(-0{,}9754609375) = 1{,}9631152344$$

$$y_1(h) = y_1 + \frac{1}{6}h(k_{1.1} + 2k_{2.1} + 2k_{3.1} + k_{4.1})$$
$$y_1(0{,}025) = 1$$
$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{1}{40}\right)(0 + 2(-0{,}0125) + 2(-0{,}0121875)$$
$$- 0{,}0121933594)$$
$$y_1(0{,}025) = 1$$
$$+ \frac{1}{240}(0 + 2(-0{,}0125) + 2(-0{,}0121875)$$
$$- 0{,}0121933594)$$
$$y_1(0{,}025) = 1 - 0{,}0002565348$$
$$y_1(0{,}025) = 0{,}9997434652$$

$$y_2(h) = y_2 + \frac{1}{6}h(k_{1.2} + 2k_{2.2} + 2k_{3.2} + k_{4.2})$$
$$y_2(0{,}025) = 0$$
$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{1}{40}\right)(-1 + 2(-0{,}975) + 2(-0{,}97546875)$$
$$- 0{,}0121933594)$$

$$y_2(0{,}025) = 0 + \frac{1}{240}(-1 + 2(-0{,}975) + 2(-0{,}97546875) - 0{,}0121933594)$$

$$y_2(0{,}025) = 0 - 0{,}0204713786$$

$$y_2(0{,}025) = -0{,}0204713786$$

$$y_3(h) = y_3 + \frac{1}{6}h(k_{1.3} + 2k_{2.3} + 2k_{3.3} + k_{4.3})$$

$$y_3(0{,}025) = -1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{40}\right)(2 + 2(1{,}9625) + 2(1{,}963125) + 1{,}96311352344)$$

$$y_3(0{,}025) = -1 + \frac{1}{240}(2 + 2(1{,}9625) + 2(1{,}963125) + 1{,}9631152344)$$

$$y_3(0{,}025) = -1 + 0{,}0492265218$$

$$y_3(0{,}025) = -0{,}9507734782$$

$$h = 0{,}01 = \frac{1}{100}$$

$$k_{1.1} = f_1(0, 1, 0, -1) = 1(0) = 0$$

$$k_{1.2} = f_2(0, 1, 0, -1) = 1(-1) = -1$$

$$k_{1.3} = f_3(0, 1, 0, -1) = -3(1) - 7(0) - 5(-1) = 2$$

$$y_1 + k_{1.1} \times \frac{h}{2} = 1 + (0)\left(\frac{\frac{1}{100}}{2}\right)$$

$$y_1 + k_{1.1} \times \frac{h}{2} = 1 + 0$$

$$y_1 + k_{1.1} \times \frac{h}{2} = 1$$

$$y_2 + k_{1.2} \times \frac{h}{2} = 0 + (-1)\left(\frac{\frac{1}{100}}{2}\right)$$

$$y_2 + k_{1.2} \times \frac{h}{2} = 0 - \frac{1}{200}$$

$$y_2 + k_{1.2} \times \frac{h}{2} = -\frac{1}{200} = -0{,}005$$

$$y_3 + k_{1.3} \times \frac{h}{2} = -1 + (2)\left(\frac{\frac{1}{100}}{2}\right)$$

$$y_3 + k_{1.3} \times \frac{h}{2} = -1 + \frac{1}{100}$$

$$y_3 + k_{1.3} \times \frac{h}{2} = -\frac{99}{100} = -0{,}99$$

$$k_{2.1} = f_1(0{,}005, 1, -0{,}005, -0{,}99) = 1(-0{,}005) = -0{,}005$$

$$k_{2.2} = f_2(0{,}005, 1, -0{,}005, -0{,}99) = 1(-0{,}99) = -0{,}99$$

$$k_{2.3} = f_3(0{,}005, 1, -0{,}005, -0{,}99)$$
$$= -3(1) - 7(-0{,}005) - 5(-0{,}99) = 1{,}985$$

$$y_1 + k_{2.1} \times \frac{h}{2} = 1 + (-0{,}005)\left(\frac{\frac{1}{100}}{2}\right)$$

$$y_1 + k_{2.1} \times \frac{h}{2} = 1 - 0{,}000025$$

$$y_1 + k_{2.1} \times \frac{h}{2} = 0{,}999975$$

$$y_2 + k_{2.2} \times \frac{h}{2} = 0 + (-0{,}99)\left(\frac{\frac{1}{100}}{2}\right)$$

$$y_2 + k_{2.2} \times \frac{h}{2} = 0 - 0{,}00495$$

$$y_2 + k_{2.2} \times \frac{h}{2} = -0{,}00495$$

$$y_3 + k_{2.3} \times \frac{h}{2} = -1 + (1{,}985)\left(\frac{\frac{1}{100}}{2}\right)$$

$$y_3 + k_{2.3} \times \frac{h}{2} = -1 + 0{,}009925$$

$$y_3 + k_{2.3} \times \frac{h}{2} = -0{,}990075$$

$$k_{3.1} = f_1(0{,}005, 0{,}999975, -0{,}00495, -0{,}990075) = 1(-0{,}00495)$$
$$= -0{,}00495$$
$$k_{3.2} = f_2(0{,}005, 0{,}999975, -0{,}00495, -0{,}990075) = 1(-0{,}990075)$$
$$= -0{,}990075$$
$$k_{3.3} = f_3(0{,}005, 0{,}999975, -0{,}00495, -0{,}990075)$$
$$= -3(0{,}999975) - 7(-0{,}00495) - 5(-0{,}990075)$$
$$= 1{,}9851$$

$$y_1 + k_{3.1} \times \frac{h}{2} = 1 + (-0{,}00495)\left(\frac{\frac{1}{100}}{2}\right)$$

$$y_1 + k_{3.1} \times \frac{h}{2} = 1 - 0{,}00002475$$

$$y_1 + k_{3.1} \times \frac{h}{2} = 0{,}99997525$$

$$y_2 + k_{3.2} \times \frac{h}{2} = 0 + (-0{,}990075)\left(\frac{\frac{1}{100}}{2}\right)$$

$$y_2 + k_{3.2} \times \frac{h}{2} = 0 - 0{,}004950375$$

$$y_2 + k_{3.2} \times \frac{h}{2} = -0{,}004950375$$

$$y_3 + k_{3.3} \times \frac{h}{2} = -1 + (1{,}9851)\left(\frac{\frac{1}{100}}{2}\right)$$

$$y_3 + k_{3.3} \times \frac{h}{2} = -1 + 0{,}0099255$$

$$y_3 + k_{3.3} \times \frac{h}{2} = -0{,}9900745$$

$$k_{4.1} = f_1(0{,}01, 0{,}99997525, -0{,}004950375, -0{,}9900745)$$
$$= 1(-0{,}004950375) = -0{,}004950375$$
$$k_{4.2} = f_2(0{,}01, 0{,}99997525, -0{,}004950375, -0{,}9900745)$$
$$= 1(-0{,}9900745) = -0{,}9900745$$
$$k_{4.3} = f_3(0{,}01, 0{,}99997525, -0{,}004950375, -0{,}9900745)$$
$$= -3(0{,}99997525) - 7(-0{,}004950375)$$
$$- 5(-0{,}9900745) = 1{,}98845099375$$

$$y_1(h) = y_1 + \frac{1}{6}h(k_{1.1} + 2k_{2.1} + 2k_{3.1} + k_{4.1})$$
$$y_1(0{,}01) = 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{100}\right)(0 + 2(-0{,}005) + 2(-0{,}0495)$$
$$- 0{,}004950375)$$
$$y_1(0{,}01) = 1 + \frac{1}{600}(0 + 2(-0{,}005) + 2(-0{,}0495) - 0{,}004950375)$$
$$y_1(0{,}01) = 1 - 0{,}0001899172$$
$$y_1(0{,}01) = 0{,}9998100827$$

$$y_2(h) = y_2 + \frac{1}{6}h(k_{1.2} + 2k_{2.2} + 2k_{3.2} + k_{4.2})$$
$$y_2(0{,}01) = 0 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{100}\right)(-1 + 2(-0{,}99) + 2(-0{,}990075)$$
$$- 0{,}9900745)$$
$$y_2(0{,}01) = 0 + \frac{1}{600}(-1 + 2(-0{,}99) + 2(-0{,}990075)$$
$$- 0{,}9900745)$$
$$y_2(0{,}01) = 0 - 0{,}0099170408$$
$$y_2(0{,}01) = -0{,}0099170408$$

$$y_3(h) = y_3 + \frac{1}{6}h(k_{1.3} + 2k_{2.3} + 2k_{3.3} + k_{4.3})$$

$$y_3(0{,}01) = -1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{100}\right)(2 + 2(1{,}985) + 2(1{,}9851) + 1{,}98845099375)$$

$$y_3(0{,}01) = -1 + \frac{1}{600}(2 + 2(1{,}985) + 2(1{,}9851) + 1{,}98845099375)$$

$$y_3(0{,}01) = -1 + 0{,}0198814183$$

$$y_3(0{,}01) = -0{,}9801185817$$

$$h = 0{,}005 = \frac{1}{200}$$

$$k_{1.1} = f_1(0, 1, 0, -1) = 1(0) = 0$$

$$k_{1.2} = f_2(0, 1, 0, -1) = 1(-1) = -1$$

$$k_{1.3} = f_3(0, 1, 0, -1) = -3(1) - 7(0) - 5(-1) = 2$$

$$y_1 + k_{1.1} \times \frac{h}{2} = 1 + (0)\left(\frac{\frac{1}{200}}{2}\right)$$

$$y_1 + k_{1.1} \times \frac{h}{2} = 1 + 0$$

$$y_1 + k_{1.1} \times \frac{h}{2} = 1$$

$$y_2 + k_{1.2} \times \frac{h}{2} = 0 + (-1)\left(\frac{\frac{1}{200}}{2}\right)$$

$$y_2 + k_{1.2} \times \frac{h}{2} = 0 - \frac{1}{400}$$

$$y_2 + k_{1.2} \times \frac{h}{2} = -\frac{1}{400} = -0{,}0025$$

$$y_3 + k_{1.3} \times \frac{h}{2} = -1 + (2)\left(\frac{\frac{1}{200}}{2}\right)$$

$$y_3 + k_{1.3} \times \frac{h}{2} = -1 + \frac{1}{200}$$

$$y_3 + k_{1.3} \times \frac{h}{2} = -\frac{199}{200} = -0{,}995$$

$$k_{2.1} = f_1(0{,}0025, 1, -0{,}0025, -0{,}995) = 1(-0{,}0025) = -0{,}0025$$

$$k_{2.2} = f_2(0{,}0025, 1, -0{,}0025, -0{,}995) = 1(-0{,}995) = -0{,}995$$

$$k_{2.3} = f_3(0{,}0025, 1, -0{,}0025, -0{,}995)$$

$$= -3(1) - 7(-0{,}0025) - 5(-0{,}995) = 1{,}9925$$

$$y_1 + k_{2.1} \times \frac{h}{2} = 1 + (-0{,}0025)\left(\frac{\frac{1}{200}}{2}\right)$$

$$y_1 + k_{2.1} \times \frac{h}{2} = 1 - 0{,}00000625$$

$$y_1 + k_{2.1} \times \frac{h}{2} = 0{,}99999375$$

$$y_2 + k_{2.2} \times \frac{h}{2} = 0 + (-0{,}995)\left(\frac{\frac{1}{200}}{2}\right)$$

$$y_2 + k_{2.2} \times \frac{h}{2} = 0 - 0{,}0024875$$

$$y_2 + k_{2.2} \times \frac{h}{2} = -0{,}0024875$$

$$y_3 + k_{2.3} \times \frac{h}{2} = -1 + (1{,}9925)\left(\frac{\frac{1}{200}}{2}\right)$$

$$y_3 + k_{2.3} \times \frac{h}{2} = -1 + 0{,}00498125$$

$$y_3 + k_{2.3} \times \frac{h}{2} = -0{,}99501875$$

$$k_{3.1} = f_1(0{,}0025, 0{,}99999375, -0{,}0024875, -0{,}99501875)$$

$$= 1(-0{,}0024875) = -0{,}0024875$$

$$k_{3.2} = f_2(0{,}0025, 0{,}99999375, -0{,}0024875, -0{,}99501875)$$
$$= 1(-0{,}99501875) = -0{,}99501875$$
$$k_{3.3} = f_3(0{,}0025, 0{,}99999375, -0{,}0024875, -0{,}99501875)$$
$$= -3(0{,}99999375) - 7(-0{,}0024875)$$
$$- 5(-0{,}99501875) = 1{,}992525$$

$$y_1 + k_{3.1} \times \frac{h}{2} = 1 + (-0{,}0024875)\left(\frac{\frac{1}{200}}{2}\right)$$
$$y_1 + k_{3.1} \times \frac{h}{2} = 1 - 0{,}0000062188$$
$$y_1 + k_{3.1} \times \frac{h}{2} = 0{,}9999937813$$
$$y_2 + k_{3.2} \times \frac{h}{2} = 0 + (-0{,}99501875)\left(\frac{\frac{1}{200}}{2}\right)$$
$$y_2 + k_{3.2} \times \frac{h}{2} = 0 - 0{,}0024875469$$
$$y_2 + k_{3.2} \times \frac{h}{2} = -0{,}0024875469$$
$$y_3 + k_{3.3} \times \frac{h}{2} = -1 + (1{,}992525)\left(\frac{\frac{1}{200}}{2}\right)$$
$$y_3 + k_{3.3} \times \frac{h}{2} = -1 + 0{,}0049813125$$
$$y_3 + k_{3.3} \times \frac{h}{2} = -0{,}9950186875$$

$$k_{4.1} = f_1(0{,}005, 0{,}9999937813, -0{,}0024875469, -0{,}9950186875)$$
$$= 1(-0{,}0024875469) = -0{,}0024875469$$
$$k_{4.2} = f_2(0{,}005, 0{,}9999937813, -0{,}0024875469, -0{,}9950186875)$$
$$= 1(-0{,}9950186875) = -0{,}9950186875$$

$$k_{4.3} = f_3(0{,}005, 0{,}9999937813, -0{,}0024875469, -0{,}9950186875)$$
$$= -3(0{,}9999937813) - 7(-0{,}0024875469)$$
$$- 5(-0{,}9950186875) = 1{,}9925249219$$

$$y_1(h) = y_1 + \frac{1}{6}h(k_{1.1} + 2k_{2.1} + 2k_{3.1} + k_{4.1})$$
$$y_1(0{,}005) = 1$$
$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{1}{200}\right)(0 + 2(-0{,}0025) + 2(-0{,}0024875)$$
$$- 0{,}0024875469)$$
$$y_1(0{,}005) = 1$$
$$+ \frac{1}{1200}(0 + 2(-0{,}0025) + 2(-0{,}0024875)$$
$$- 0{,}0024875469)$$
$$y_1(0{,}005) = 1 - 0{,}0000062395$$
$$y_1(0{,}005) = 0{,}9999937605$$

$$y_2(h) = y_2 + \frac{1}{6}h(k_{1.2} + 2k_{2.2} + 2k_{3.2} + k_{4.2})$$
$$y_2(0{,}005) = 0$$
$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{1}{200}\right)(-1 + 2(-0{,}995) + 2(-0{,}99501875)$$
$$- 0{,}9950186875)$$
$$y_2(0{,}005) = 0$$
$$+ \frac{1}{1200}(-1 + 2(-0{,}995) + 2(-0{,}99501875)$$
$$- 0{,}9950186875)$$
$$y_2(0{,}005) = 0 - 0{,}0049792135$$
$$y_2(0{,}005) = -0{,}0049792135$$

$$y_3(h) = y_2 + \frac{1}{6}h(k_{1.3} + 2k_{2.3} + 2k_{3.3} + k_{4.3})$$

$$y_3(0{,}005) = -1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{200}\right)(2 + 2(1{,}9925) + 2(1{,}992525) + 1{,}9925249219)$$

$$y_3(0{,}005) = -1 + \frac{1}{1200}(2 + 2(1{,}9925) + 2(1{,}992525) + 1{,}9925249219)$$

$$y_3(0{,}005) = -1 + 0{,}0099688124$$

$$y_3(0{,}005) = -0{,}9900311876$$

Sehingga Galat dari soal no 1 dan 2 adalah:

Tabel 1. Galat Sistem Persamaan Diferensial

Soal	Solusi Eksak			Ukuran langkah	Solusi Numerik			Galat $\lvert Solusi\ Eksak - Solusi\ Numerik \rvert$		
	y_1	y_2	y_3		y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3
1	1	-1	1	0	1	-1	1	0	0	0
	1	-1	1	0,1	0,9040479167	-0,9040479167	0,9040479167	0,0959520833	0,0959520833	0,0959520833
	1	-1	1	0,025	0,9759740234	-0,9759740234	0,9759740234	0,0240259766	0,0240259766	0,0240259766
	1	-1	1	0,01	0,9900415419	-0,9900415419	0,9900415419	0,0099584581	0,0099584581	0,0099584581
	1	-1	1	0,005	0,9950104011	-0,9950104011	0,9950104011	0,0049895989	0,0049895989	0,0049895989
2	1	0	-1	0	1	0	-1	0	0	0
	1	0	-1	0,1	0,9960770833	-0,092033333	-0,8120104333	0,0039229167	0,092033333	0,1879895667

	1	0	-1	0,025	0,9997434652	-0,024713786	-0,9507734782	0,0002565348	0,024713786	0,0492265218
	1	0	-1	0,01	0,9998100827	-0,0099170408	-0,9801185817	0,0001899173	0,0099170408	0,0198814183
	1	0	-1	0,005	0,9999937605	-0,0049792135	-0,9900311876	0,0000062395	0,0049792135	0,0099688124

BAB 5

PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya dapat ditarik kesimpulan untuk menentukan solusi persamaan diferensial orde-3 dengan metode Runge-Kutta orde-4 adalah:

a. Mereduksi persamaan diferensial orde-3 menjadi sistem persamaan diferensial orde-1.
b. Menentukan nilai eksak sistem persamaan diferensial.
c. Menentukan solusi numerik dengan metode Runge-Kutta orde-4 dengan masalah nilai awal dan ukuran langkah atau interval (h) yang telah ditentukan seperti pada soal nomor satu atau penulis tentukan berdasarkan referensi pada soal nomor dua.
d. Menentukan galat *(error)* pada tiap interval yang berbeda.

Dari hasil perhitungan didapat solusi numerik mendekati nilai eksak saat ukuran atau interval cukup kecil.

5.2 Saran

Pada penelitian ini hanya menyelesaikan persamaan diferensial linear homogen orde-3 dengan metode Runge-Kutta orde-4. Saran penulis untuk penelitian selanjutnya adalah menyelesaikan bentuk persamaan diferensial lainnnya atau menyelesaikan persamaan diferensial orde tinggi dengan cara numeric tanpa mereduksi menjadi sistem persamaan diferensial.

DAFTAR PUSTAKA

Abdulsalam, A, Senu, N & Majid, Z.A. 2019. Direct Oe-Step for Solving Third Order Boundary Value Problems. *International Journal of Applied Mathematics*. 32(II). Hlm 155-176.

Anidu, A.O, dkk. 2015. Dynamic Computation of Runge-kutta Fourth-Order Algorithm for First and Second Order Ordinary Differential Equation Using Java. *International Journal of Computer Science Issues*. 3 (XII). Hlm 211-218.

Atkisnon, K, Han, W & Stewart, D. 2009. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations.* Canada: A John Wiley & Sons, Inc., Pulicataions.

Blenchard, P., Devaney, R.L. & Hall, G.R. 2011. *Differential Equations.* Boston: Cengage Learning.

Butcher, J.C. 2008. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations.* West Sussex: John Wiley & Sons Ltd.

Bronson, Richard & Costa, G.B. 2006. *Differential Equations.* New York: McGraw-Hill.

Chapra, S.C & Canale, R.P. 2015. *Numerical Methods for Engineers.* New York: Mc Graw Hill Education.

Chasnov, J.R. 2019. *Differential Equation.* Hongkong: University of Hongkong.

Chauhan, Vijeyata & Srivastava, P.K. 2019. Computational Techniques Based of Runge-Kutta method of Various Order for Solving Differential Equations. *International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences*. 2(IV). Hlm 375-386.

Coddington, E.A & Carlson, Robert. 1997. *Linear Ordinary Differential Equations*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Dormand, J.R. 2018. *Numerical Methods for Differential Equations.* Boca Raton: CRC Press.

Gautschi, Walter. 2012. *Numerical Analysis.* New York: Springer.

Hamzah, Amir. 2019. *Metode Penelitian Pustaka*. Malang: Literasi Nusantara.

Islam, M.A. 2015. Accurate Solutions of Initial Value Problems for Ordianry Differential Equations with the Fourth Order Runge Kutta Method. *Journal of Mathematics Research.* 3(VII). Hlm 41 - 45.

Kartono. 2012. *Persamaan Diferensial Biasa: Model Matematika Fenomena Perubahan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Lebl, Jiří. 2019. *Differential Equations for Engineer.* California: Creative Common Atribution.

Majid, Z.A, dkk. 2012. Solving Directly General Third Order Ordinary Differential Equations Using Two Point Four Step Block Methods. *Jurnal Sains Malaysiana.* 41(V). Hlm 623-632.

Marwan & Munzir, Said. 2009. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta. Graha Ilmu.

Mechee, M.S, dkk. 2014. A Third-Order Direct Integrators of Runge-Kutta Type for Special Third-Order Ordinary and Delay Differential Equations. *Asian Journal of Applied Sciences.* Hlm 1-15.

Nugroho. 2011. *Persamaan Differensial Biasa dan Aplikasinya.* Yogyakarta: Graha Ilmu.

Olabode, Bola Titilayo. 2009. An Accurate Scheme by Block Method for Third Order Ordinary Differential Equations. *Jurnal Pasifik Ilmu dan Teknologi.* 1(X). Hlm 136-142.

Palanisamy, Gowry. 2017. A Case Study on Runge-Kutta 4^{th} Order Differential Equations and its Application. *Imperial Journal of Interdiciplinary Research (IJIR).* 2(III). Hlm 134 - 139.

Sasser, J.E. 2005. "History of Ordinary Differential Equations the First Hundred Years". Diambil dari https://citeseerx.ist.psu.edu (diakses 11 Februari 2020).

Sihombing, S.C & Dahlia, Agus. 2018. Penyelesaian Persamaan Diferensial Linear Orde Satu dan Dua disertai Nilai Awal dengan Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Lima Butcher dan Felhberg (RKF45). *Jurnal Matematika Integratif.* 14 (I). Hlm 51-60.

Tracy, C.A. 2017. "Lectures on Differential Equations". Diambil dari https://www.math.ucdavis.edu (diakses 31 Desember 2019).

Varela, M.P.B et al. 2019. Analytic Method for Solving Higher Order Ordinary Differential Equation. Journal Mathematics 7 (826). Hlm 1-17.

Yulistiyanto, Bambang. *Metode Numerik: Aplikasi Untuk Teknik Sipil.* Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.